

## 1.2 – épreuves écrites

### 1.2 A - MATHEMATIQUES I - filière MP

#### I) LE SUJET

Le problème commençait par deux questions classiques d'algèbre linéaire, consistant à diagonaliser une matrice. Ces questions ont été en général bien traitées, certains candidats les regroupant en préférant déterminer les vecteurs propres par un calcul direct plutôt que d'utiliser le polynôme caractéristique. On pouvait obtenir la note maximale pour ces deux questions par cette méthode, mais il fallait pour cela répondre complètement à la première, démontrer que les racines de l'unité étaient les seules valeurs propres possibles ne suffisait pas. A la première question, l'étude du cas des racines réelles, avec une discussion sur la parité de  $n$ , était en général oublié.

A la question suivante nous avons souvent observé un certain manque de rigueur, la formule des probabilités totales était souvent oubliée. Nous avons aussi rencontré un certain nombre de réponses pour la matrice  $A$  données au hasard, mais un problème de mathématiques ne se réduit pas à des devinettes... Il y avait deux réponses possibles, l'une utilisant  $J^T$  et l'autre, plus intéressante pour la suite,  $J^{n-1}$ . La plupart des candidats n'ont pas vu la relation  $J^T = J^{n-1}$ , ce qui les a bloqué pour toute la fin de la partie puisqu'ils n'ont pas trouvé les valeurs propres de la matrice  $A$ .

#### Partie B

A la question 6, la convexité de  $B_n$  n'est qu'une question d'écriture, par contre la compacité demande plus de précision : préciser tout d'abord que toutes les normes sont équivalentes puisqu'on est dans un espace vectoriel de dimension finie, puis indiquer clairement quelle norme on choisit, et enfin quelle caractérisation des fermés on va utiliser. Signalons au passage que  $B_n$  n'est pas la pré-image d'un fermé de  $\mathbb{R}$ . Les raisons pour lesquelles  $B_n$  n'est pas un sous-espace vectoriel ne manquent pas, les seuls candidats qui n'ont pas eu de points sur cette question sont ceux qui ont oublié d'y répondre (ces oubli de réponse à une question facile sont assez courants, nous recommandons aux futurs candidats d'être vigilants). A la question suivante on a encore un début facile, la question de sous-groupe est un peu plus délicate et on attendait, par exemple, une justification précise à partir d'un produit matriciel de la formule  $M_\sigma M_\tau = M_{\sigma\tau}$  où  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux permutations. La question sur la diagonalisabilité des éléments de  $P_n$  a tenu en échec une forte proportion de candidats, peut-être parce qu'elle était ouverte ?

La question 8 était inhabituelle, elle a bien mis en évidence les capacités d'adaptation et l'imagination des meilleurs candidats. Au niveau des conseils, remarquons qu'une question surprenante n'est pas forcément difficile.

Il y avait ensuite un petit problème d'énoncé, puisque si on pose  $r=1$  le résultat de la question 9 est immédiat, mais pas très utile pour la suite. Par contre avec  $r \geq 2$ , faire une démonstration correcte demande pas mal de soins et nous avons eu beaucoup de rédactions approximatives. En utilisant bien la matrice indiquée dans l'énoncé et la question précédente (avec  $r \geq 2$ ) la question 10 est abordable et a été traitée correctement dans les meilleures copies, de même pour la suivante.

A la question 12 nous avons été surpris par le nombre de candidats qui n'ont pas pensé à justifier  $\lambda_0 \neq 1$  et nous avons trouvé ensuite assez fréquemment une erreur de raisonnement qui consistait à montrer qu'il y avait apparition d'un élément non nul à la place d'un zéro, mais sans justifier qu'aucun élément non nul ne disparaissait. La question suivante a visiblement surpris puisqu'il fallait faire un raisonnement par récurrence sur le nombre de termes non nuls de la matrice  $A$ , ce qui est pour le moins inhabituel. Nous avons lu beaucoup de complications à la question suivante, puisqu'il suffisait de faire remarquer que l'ensemble  $P_n$  est fini... La suite n'étant d'ailleurs pas beaucoup plus compliquée puisqu'il suffit d'appliquer la question précédente. Nous conseillons aux futurs candidats de ne pas se précipiter sans réfléchir sur des arguments topologiques dans une situation aussi simple.

### Partie C

Une première question très classique a fait la joie des grapiilleurs, ensuite on trouvait très souvent un invocation du théorème spectral, mais on attendait une réponse précise avec la matrice  $P$  qui n'était pas toujours donnée. Le début de la question 17 ne présentait pas de difficulté pour qui connaissait le cours sur les matrices orthogonales et pour la suite on attendait un minimum de précisions sur le calcul des coefficients de la matrice  $D_A P - P D_A$ . Peu de candidats étaient arrivés jusque là et comme cela supposait un bon niveau, la question 18 ne leur posait pas de problème particulier.

La dernière question était délicate et le problème un peu long, donc pratiquement aucun candidat ne l'a abordée de manière significative.

Terminons par la traditionnelle remarque sur la présentation. La situation est stable, on trouve toujours une majorité de copies bien présentées et les inévitables torchons qui produisent un effet déplorable sur le correcteur. Signalons encore une fois que les encres pâles peuvent être illisibles sur le papier de qualité moyenne des copies et s'effacer au fil du temps, de même que qui est écrit après utilisation d'un effaceur. L'utilisation d'un stylo à bille noir et de brouillons est très probablement la meilleure méthode pour arriver à une copie agréable à lire.