

MATHEMATIQUES I - filière MP

I) LE SUJET

L'objet de ce problème est l'étude du transport de Monge dans le cas uni-dimensionnel. Il s'agit de déplacer un tas de sable dont le poids entre les abscisses u et $u + du$ est donné par $2 \exp(-u^2/2) du$ vers un tas de sable de densité linéique $f(u) \exp(-u^2/2)$.

La partie I fait établir quelques calculs préliminaires.

La partie II fait établir une inégalité et demande de caractériser le cas d'égalité.

La partie III fait étendre les résultats de II au cas de fonctions pouvant s'annuler.

Le sujet met en jeu une partie du programme d'analyse. Plus précisément, les notions suivantes jouent un rôle important dans le problème : sens de variation d'une fonction, intégrales, équivalents et inégalités, intégrales à paramètres, convergence dominée, convergence uniforme.

II) REMARQUES GENERALES

La majorité des candidats au concours commun ne cite pas avec suffisamment de précision les théorèmes du programme sur les intégrales à paramètres. En outre, trop de copies ne sont pas assez bien soignées ou bien écrites.

Le problème est long et personne ne le traite en totalité, toutefois un très petit nombre de candidats impressionne le jury et obtient une note voisine de 20. Les parties I et II ainsi que le début de la partie III sont abordés dans la plupart des copies, mais très peu de candidats maîtrisent la fin du problème.

Il semble au jury que ce problème permet de bien classer les candidats par ordre de mérite. La valeur assez élevée de l'écart type témoigne de la qualité de discrimination du sujet.

III) REMARQUES PARTICULIERES

Nous allons indiquer quelques erreurs ou maladresses fréquemment commises.

Certains candidats perdent un temps précieux sur la question 1) en y consacrant plus d'une copie double. En outre, un certain nombre de candidats considère que $\exp(-x^2)$ est une "fonction de référence" qui permet d'établir l'intégrabilité d'une fonction sur R .

Dans la question 5), la formule de changement de variable n'est pas toujours justifiée avec le soin exigé.

Dans la question 6), certains candidats confondent $f^2(u)$ et $f \circ f(u)$. D'autres affirment que f croissante entraîne que f^2 est également croissante (il faut établir que $f(u)$ est positif pour u assez grand).

Dans la question 10), beaucoup de candidats font comme si $\log f(u)$ était toujours ≥ 0 . En outre, la question 7) ne suffit pas à établir l'existence de $\Phi(f)$. Seul un très petit nombre de candidats répond correctement à cette question.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas pour déterminer les (en fait la...) solutions de l'équation $\Phi'(u) = 1 + \log \Phi'(u)$.

Pour résoudre la question 12), il faut citer avec précision les résultats des questions 4) et 9).

A propos de la question 14), pour déduire $h \equiv 0$ de l'égalité $\int_R h(u)du = 0$, il faut bien préciser que h est à valeurs ≥ 0 et est continue sur R .

Dans la question 15), l'inégalité de domination est rarement correctement établie. La fonction $u \log u$ n'est pas croissante sur $]0, +\infty[$.

Certains candidats affirment que si la suite de fonctions (h_k) converge uniformément vers 0 sur la droite réelle R alors la suite $\int_R h_k(u)du$ tend vers 0. Bien entendu, on a besoin en plus d'une inégalité de domination pour pouvoir conclure.

IV) CONCLUSION

Il est préférable de commencer par lire tranquillement la totalité du sujet pour assimiler les notations et comprendre de quoi il retourne.

Il est très important d'écrire lisiblement et d'encadrer les résultats obtenus.

A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant *avec précision* les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser ceux des candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.

Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.

De plus, nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante.