MATHEMATIQUES I - filière MP

I) LE SUJET

L'objet de ce problème est l'étude et le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{e^{\pi t} - 1}\, dt.$$

La partie I fait établir une première expression de I et étudier la fonction $t \to \dfrac{\arctan t}{e^{\pi t} - 1}$.

La partie II introduit une nouvelle fonction qui permet de transformer l'expression de I établie dans la première partie. La partie III fait calculer explicitement I.

Le sujet met en jeu une partie importante du programme d'analyse. Plus précisément, les notions suivantes jouent un rôle important dans le problème : suites, séries, intégrales, développements limités, équivalents et inégalités, sens de variation d'une fonction, équations différentielles, intégrales à paramètres, séries de Fourier.

II) LES RESULATS OBTENUS

La majorité des candidats au Concours Commun ne cite pas avec suffisamment de précision les théorèmes du programme sur les intégrales à paramètres et les séries de Fourier. En outre, trop de copies ne sont pas assez bien soignées et bien écrites.

Le problème est long et personne ne le traite en totalité ; toutefois un très petit nombre de candidats impressionne le jury et obtient une note maximale. Les parties I et II ainsi que le début de la partie III sont abordés dans la plupart des copies mais peu de candidats maîtrisent la fin du problème.

Beaucoup de notes basses sont attribuées.

La moyenne générale est de l'ordre de 7,26.

Il semble au jury que ce problème permet de bien classer les candidats par ordre de mérite. La valeur assez élevée de l'écart type témoigne de la qualité de discrimination du sujet.

III) COMMENTAIRE DETAILLE

Nous allons indiquer quelques erreurs ou maladresses fréquemment commises.

$f(t) \sim_{+\infty} g(t()$ n'implique pas nécessairement que $\int_0^{\infty} f(t)dt$ *et* $\int_0^{\infty} g(t)dt$ soient de même nature.

La convergence uniforme de $\sum_n f_n(t)$ sur $[0,+\infty[$ n'implique pas nécessairement que $\int_0^{\infty} \sum_n f_n(t)dt = \sum_n \int_0^{\infty} f_n(t)dt.$

Une interversion du type $\int_0^{\infty} \sum_n f_n(t)dt = \sum_n \int_0^{\infty} f_n(t)dt.$ exige l'usage très soigné du théorème approprié à la situation.

L'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ ne converge pas.

Le théorème de convergence dominée est souvent cité de manière incomplète ou incorrecte. Par exemple il faut vérifier que $\left|f_n\right| \leq \Phi$ et non pas seulement $f_n \leq \Phi$.

Certains candidats confondent $\frac{\partial}{\partial x}$ avec $\frac{\partial}{\partial t}$ quand il s'agit de considérer $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$. L'existence de $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ nécessite une application très soignée du théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Beaucoup de candidats ne maîtrisent pas la méthode de variations des constantes pour l'équation différentielle $y + y'' = \frac{1}{x}$.

L'implication $\lim_{t\to\infty} (a\cos t + b\sin t) = 0 \Rightarrow a = b = 0$ nécessite une démonstration.

Soit *f* une fonction continue et 2π-périodique sur *R*. Le fait que la restriction *f* à [0, 2π] soit de classe C^{∞} n'implique pas que *f* soit de classe C^{∞} sur *R*.

La série de Fourier d'une fonction continue et 2π – périodique ne converge pas uniformément en général.

Les candidats qui citent de manière imprécise (soit par ignorance soit pour aller vite) les théorèmes sur les intégrales à paramètres ou les séries de Fourier perdent des points précieux.

IV) RECOMMANDATIONS AUX FUTURS CANDIDATS

Il est préférable de commencer par lire tranquillement la totalité du sujet pour assimiler les notations et comprendre de quoi il retourne.

Il est très important d'écrire lisiblement et d'encadrer les résultats obtenus.

A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant *avec précision* les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser ceux des candidats qui ont pris le temps de bien rédiger. Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.

De plus, nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante.