1 - MATHÉMATIQUES

1.2 - Épreuves écrites

1.2 A - MATHEMATIQUES I - filière MP

I) REMARQUES GENERALES

I.1) Le sujet

L'objet de ce problème est l'étude des applications semi-linéaires d'un espace vectoriel complexe de dimension finie dans lui-même.

La partie I demande d'établir une traduction matricielle de la notion de semi-linéarité et fait étudier les valeurs et vecteurs co-propres d'une application semi-linéaire. Plusieurs exemples sont proposés pour illustrer ces concepts.

La partie II fait établir, en guidant les candidats pas à pas, une condition nécessaire et suffisante de co-diagonalisabilité d'une matrice complexe quelconque.

Le sujet met en jeu une grande partie du programme d'algèbre linéaire. Plus précisément, les notions suivantes jouent un rôle important dans le problème : espace vectoriel, rang, base, calcul matriciel, sous-espace propre, réduction des endomorphismes… etc.

I.2) Les résultats obtenus

La majorité des candidats au Concours Commun maîtrisent assez bien les notions du programme d'algèbre linéaire. Par contre, trop de copies ne sont pas assez bien soignées ni bien écrites.

Le problème est très long et personne ne le traite en totalité, toutefois un petit nombre de candidats impressionnent le jury et obtiennent une note voisine de 20. La partie I est abordée dans la plupart des copies. La majorité des candidats peuvent résoudre quelques questions de la partie II mais peu nombreux sont ceux qui la traitent complètement.

Peu de notes très basses sont attribuées.

La moyenne générale est de $\frac{8{,}40}{20}$.

Il semble au jury que ce problème permet de classer les candidats par ordre de mérite. La valeur assez élevée de l'écart type (3,5) témoigne de la qualité de discrimination du sujet.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Nous allons indiquer quelques erreurs ou maladresses fréquemment commises.

A propos de la partie I

Si x est un vecteur et u une application semi-linéaire alors $\frac{u(x)}{x}$ n'a pas de sens.

Le calcul matriciel et les formules de changement de base ne sont pas toujours bien maîtrisées.

Dans la question I.2.b), il ne faut pas se contenter de donner le résultat, il faut également produire une démonstration.

Pour affirmer que la relation AX=λX prouve que le nombre complexe λ est valeur propre de la matrice A, il faut préciser (voire démontrer) que le vecteur X est *non nul*.

Dans la question I.4) i) certains candidats affirment que si (A $\overline{X}$, X) est liée (implicitement pour la structure de C-espace vectoriel) alors il existe α réel tel que A $\overline{X} = \alpha$ X. D'autres, toujours dans le souci de se ramener coûte que coûte à ce qu'il faut démontrer, affirment que $|\alpha|^2 = \lambda$ entraîne que le nombre complexe α est égale à $\sqrt{\lambda}$. En fait, il faut dans un premier temps écrire $|\alpha| = \sqrt{\lambda}$ puis invoquer la question I.1.b pour en déduire que, comme α, $|\alpha|$ est valeur copropre. Il semble que certains candidats cherchent à tricher et que d'autres ne savent pas résoudre cette question faute d'avoir pris le temps d'assimiler les notations et résultats antérieurs.

La matrice *D* blocs par blocs de la question I.6 n'est pas symétrique en général (à moins que *B* et *C* ne le soient).

A propos de la partie II

Dans II.1, certains candidats utilisent une relation différente de celle donnée par l'énoncé.

Pour démontrer qu'une famille libre $(X_1,...,X_n)$ forme une base, il faut préciser que l'espace vectoriel est de dimension *n*.

Dans II.2, le fait que μ soit valeur co-propre de *A* n'entraîne pas que μ^k soit valeur co-propre de A^k.

Précisons que S^{-1} A $\overline{S}$ n'est pas semblable à *A* ; pour affirmer que ces deux matrices ont même rang, il faut produire une démonstration (correcte), par exemple en disant que ces deux matrices sont équivalentes.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Il est préférable de commencer par lire tranquillement la totalité du sujet pour assimiler les notations et comprendre de quoi il retourne.

Il est très important d'écrire lisiblement et d'encadrer les résultats obtenus.

A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les résultats antérieurs utilisés et les numéros des questions correspondantes. En aucun cas, le jury ne peut attribuer de points pour une rédaction verbeuse et difficile à comprendre. Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.

De plus, nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante.