

MATHÉMATIQUES

1.2 - Épreuves écrites

1.2 A - MATH I - filière MP

I) REMARQUES GENERALES

I.1) Le sujet

Le problème faisait étudier divers endomorphismes définis par l'action d'un groupe sur des sous-espaces vectoriels M et V de l'espace des matrices $(2, 2)$ à coefficients complexes.

La partie I faisait établir des propriétés élémentaires satisfaites par les éléments de M et par certains sous-groupes du groupe des matrices inversibles de M .

Les parties II et III faisaient étudier divers endomorphismes de V construits à partir de certains éléments inversibles de M . La résolution de plusieurs questions de ces parties II et III faisaient appel aux résultats de la partie I.

Le sujet mettait en jeu une grande partie du programme d'algèbre linéaire. Plus précisément, les notions suivantes jouaient un rôle important dans le problème : espace vectoriel, dimension, base, matrice, transposée, trace, déterminant, produit scalaire, adjoint d'un endomorphisme, endomorphisme unitaire, sous-groupe...etc.

I.2) Les résultats obtenus

La majorité des candidats maîtrisent assez bien les notions du programme d'algèbre linéaire. Par contre, trop de copies ne sont pas assez bien soignées ni bien écrites.

Le problème était très long et presque personne n'a tout fait, toutefois un petit nombre de candidats ont impressionné le jury et obtenu une note voisine de 20. La partie I a été assez bien traitée dans la majorité des copies. La partie II a été abordée par la majorité des candidats mais peu nombreux sont ceux qui l'on traitée complètement. La partie III n'a été abordée de manière significative que dans un petit nombre de copies.

Peu de notes très basses ont été attribuées.

La moyenne générale est de l'ordre de $\frac{10}{20}$.

Il semble au jury que ce problème a permis de classer les candidats par ordre de mérite. La valeur assez élevée de l'écart type témoigne de la qualité de discrimination du sujet.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Nous allons indiquer quelques erreurs ou maladresses fréquemment commises.

Pour établir qu'un espace vectoriel était de dimension n il ne suffisait pas de dire que ses éléments dépendaient de n paramètres. De nombreuses erreurs de calculs ont été commises, notamment dans la partie I. Rappelons que la trace de l'identité n'est pas égale à un mais à la dimension de l'espace. Avant d'affirmer qu'un nombre réel (comme $\Re(a)$ dans la question I 4.a)) pouvait s'écrire sous la forme $\cos \theta$, il fallait vérifier qu'il appartenait à $[-1, 1]$. Pour démontrer qu'une partie H d'un groupe G était un sous-groupe, il ne suffisait pas de dire que H était stable par produit. Rappelons que pour toute matrice m de type $(2, 2)$ et tout réel λ :

$$\det(\lambda \cdot m) = \lambda^2 \det(m) \dots$$

Dans la partie II, quand on demandait d'établir qu'une certaine application définissait un endomorphisme du sous-espace vectoriel V , il fallait penser à vérifier que V était stable par la dite application. Pour établir les égalités demandées dans la question II 2 a), il fallait citer avec précision celles des questions antérieures qui étaient utilisées. Dans la question II 3 b), il ne suffisait pas de dire que la famille était orthogonale pour en déduire qu'elle formait une base.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Il est préférable de commencer par lire tranquillement la totalité du sujet pour assimiler les notations et comprendre de quoi il retourne.

Il est très important d'écrire lisiblement et d'encadrer les résultats obtenus.

A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les résultats antérieurs utilisés. En aucun cas, le jury ne peut attribuer de points pour une rédaction verbeuse et difficile à comprendre. Il est donc vivement recommandé aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'elle est devenue claire et concise.

De plus, il est fortement conseillé aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante.