J. 2240

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

MAI 2002

Option **A.** – **MATHÉMATIQUES**

deuxième composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comprend 4 pages (y compris celle-ci).

Tournez la page S.V.P.

La qualité de la rédaction , la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Dans une très large mesure les parties sont indépendantes mais les notations sont les mêmes dans tout le problème.

I–RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE BERNOULLI.

On considère l'équation différentielle de la variable réelle x

$$xh'(x) + (x-1)h(x) = -h^2(x) \qquad (1)$$

1° **a)** Déterminer les solutions de l'équation (1) sur $\mathbb{R}_+^*$. (On justifiera que si h n'est pas la fonctions nulle, on peut poser $m(x) = \dfrac{1}{h(x)}$).

b) Déterminer de même les solutions de l'équation (1) sur $\mathbb{R}_-^*$.

2° Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation de (1).

Dans toute la suite du problème on pose $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ où z est une variable complexe.

II– DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE DE LA FONCTION DE BERNOULLI.

1° Préciser l'ensemble de définition de f et montrer que f se prolonge par continuité en 0.
On notera encore f ce prolongement.

2° On suppose que la fonction f admet un développement en série entière sur un voisinage U de 0

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} b_n z^n.$$

a) Montrer que la suite (b_n) vérifie $b_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, la relation

$$b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n-k+1)!}.$$

b) Calculer b_1, b_2 et b_3.

c) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $|b_n| \leqslant 1$.

d) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum b_n z^n$ est $\geqslant 1$.

3° En déduire que f est développable en série entière sur $D_R = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$.

4° Montrer que pour tout entier naturel non nul p, on a : $b_{2p+1} = 0$ (on pourra utiliser la fonction $f(z) - b_0 - b_1 z$).

On appelle nombres de Bernoulli les nombres réels notés B_n définis, pour $n \in \mathbb{N}$, par : $B_n = n!\, b_n$.

5° Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0.$$

III–UTILISATION DES NOMBRES DE BERNOULLI : CALCUL DE $\zeta(2n)$.

On note ζ la fonction définie pour tout réel x supérieur strictement à 1 par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Soit $z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. On note c la fonction 2π-périodique définie par :

$$\forall x \in [-\pi;\pi[\quad c(x) = \cos(zx)$$

1° **a)** Déterminer la série de Fourier de la fonction c.

b) Justifier que c est la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

c) La convergence est-elle uniforme ?

2° En déduire pour $z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, la relation :

$$\operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2 - n^2}\right]$$

3° Montrer que $x\operatorname{cotan} x$ est développable en série entière au voisinage de 0.

4° Montrer que pour tout réel $x \notin \pi\mathbb{Z}$, on a la relation : $\quad x\operatorname{cotan}(x) = ix + f(2ix)$.

5° Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}\pi^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}.$$

IV–UTILISATION DES POLYNÔMES DE BERNOULLI.

On note F la fonction définie par $F(z,t) = e^{zt}f(z)$, où $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.

1° Montrer que pour tout nombre réel t, la fonction qui à z associe $F(z,t)$ est développable en série entière au voisinage de $z = 0$.

2° Montrer que l'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout z dans un voisinage de 0

$$F(z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(t)\frac{z^n}{n!},$$

où $P_n(t)$ est un polynôme, nommé polynôme de Bernoulli, que l'on exprimera à l'aide des nombres de Bernoulli B_k.

3° Écrire P_0, P_1, P_2, P_3.

4° Calculer $P_n(0)$ en fonction de B_n.

5° Expliciter le polynôme $P_n(t+1) - P_n(t)$ (on pourra calculer $F(z,t+1) - F(z,t)$).

6° En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, une expression de $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$, à l'aide des polynômes de Bernoulli.

7° Démontrer que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$, $P_n(1-t) = (-1)^n P_n(t)$.

8° Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $P_n' = nP_{n-1}$ (on pourra utiliser l'expression de P_n).

Tournez la page S.V.P.

V–DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FOURIER DES POLYNÔMES DE BERNOULLI.

On considère pour tout entier naturel n la fonction $\widehat{P}_n$ qui est 1-périodique et telle que pour tout $x \in [0;1[$

$$\widehat{P}_n(x) = P_n(x).$$

1° Étudier la parité et la continuité de $\widehat{P}_n$.

2° Déterminer la série de Fourier de $\widehat{P_1}$.

3° Pour k entier relatif et $n \in \mathbb{N}$, calculer le coefficient de Fourier complexe $c_k(\widehat{P}_n)$ en fonction de n et de k (on établira une relation de récurrence entre $c_k(\widehat{P}_n)$ et $c_k(\widehat{P}_{n-1})$).

a) En déduire, pour k entier relatif et pour n entier naturel, la valeur de $c_k(\widehat{P}_n)$.

4° Retrouver la valeur de $\zeta(2n)$ pour $n \geqslant 1$.

5° **a)** Prouver que pour $x \in [0;1[$, on a $|P_n(x)| \leqslant K\dfrac{n!}{(2\pi)^n}$, où K est une constante indépendante de n.

b) En déduire que $R = 2\pi$.

6° On pose

$$[\widehat{P}_n * \widehat{P}_p](x) = \int_0^1 \widehat{P}_n(x-t)\widehat{P}_p(t)\,dt.$$

Exprimer pour $x \in]0,1[$, $[\widehat{P}_n * \widehat{P}_p](x)$ en fonction de $\widehat{P}_{n+p}(x)$. On admettra que pour toutes fonctions f, g continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de période 1, on a

$$\int_0^1 \overline{f}(t)\,g(t)\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(f)}c_k(g).$$