J. 5046

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

AVRIL 2001

Option A. – **MATHÉMATIQUES**

deuxième composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comprend 3 pages (y compris celle-ci).

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Soit une suite de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On lui associe la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et les deux fonctions u et U définies par :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \frac{x^n}{n!}.$$

On dira que la suite (u_n) est B-sommable si la fonction U est définie sur $\mathbb{R}$ et si $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} U(x)$ appartient à $\mathbb{R}$. Si (u_n) est B-sommable, on pose alors : $S_B(u) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} U(x)$.

On dira que la suite (u_n) est C-sommable si la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ et si $\lim_{Y \to +\infty} \int_0^Y e^{-x} u(x)\, dx$ existe dans $\mathbb{R}$. Si (u_n) est C-sommable, on pose alors : $S_C(u) = \lim_{Y \to +\infty} \int_0^Y e^{-x} u(x)\, dx$, limite qu'on notera « de manière impropre » $\int_0^{+\infty} e^{-x} u(x)\, dx$.

PARTIE I

1. On considère la suite (u_n) telle que $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \geqslant 0$.
   a. La suite (u_n) est-elle B-sommable ?
   b. La suite (u_n) est-elle C-sommable ?

2. Soit a un réel non nul. On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = a^n$, $\forall n \geqslant 0$.
   a. Étudier suivant les valeurs de a la B-sommabilité de la suite (u_n). Pour les valeurs de a telles que la suite (u_n) est B-sommable, calculer $S_B(u)$.
   b. Étudier suivant les valeurs de a la C-sommabilité de la suite (u_n). Pour les valeurs de a telles que la suite (u_n) est C-sommable, calculer $S_C(u)$.

PARTIE II

Si la suite (U_n) est convergente, on pose : $U = \lim U_n$.

1. On considère une suite (u_n) bornée. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction u.
2. On considère une suite (u_n) telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions u et U.
3. On suppose que la série (Σu_n) est convergente, de somme U. Prouver que l'on a $S_B(u) = U$. On pourra commencer par le cas $U = 0$.
4. Dans le cas où (Σu_n) est une série absolument convergente, montrer que : $S_C(u) = U$.
5. Donner un exemple d'une suite (u_n) qui est C-sommable et telle que la série (Σu_n) diverge.
6. Dans cette question, on suppose que la série (Σu_n) est convergente. On pose :
$$U_{-1} = 0 \quad \text{et} \quad B(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_{n-1} x^n}{n!}.$$
   a. Montrer que B est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $B(x) = \int_0^x e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n t^n}{n!}\, dt$.
   c. Prouver l'égalité $S_C(u) = U$.

7. Soit $f(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

   Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

   On notera $G(x)$ sa somme, et l'on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} G(xt)\, dt$.

8. Montrer que pour tout x tel que $|x| < R$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-t} G(xt)\, dt = f(x)$.

PARTIE III

On note $H(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $H(0) = \frac{1}{2}$.

1.*a*. Montrer que la fonction H est développable en série entière au voisinage de 0.

b. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ son développement en série entière. Préciser son rayon de convergence.

2.*a*. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{0}^{+\infty} n!\, a_n x^{n+1}$.

b. Exprimer la somme $h(x)$ de cette série entière à l'aide de fonctions usuelles.

3.*a*. Montrer que pour $x \in]-1, 1[$:

$$h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} H(xt)\, dt.$$

b. Montrer que $\forall x \in]0, 1[$:

$$xh(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}} H(u)\, du.$$

4. On note $\psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}} H(u)\, du$.

   Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = \int_0^{+\infty} H(u)\, du.$$

5.*a*. Montrer que la fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad xy'' + 2y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.

c. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2}\, du$.