(version mardi 8 mai 2001 : 21h11)

ENSAI 1 MP 2001

(L'énoncé originel comportait 4 pages de texte)

L'objet du problème est de définition de la notion d'inverse d'une application linéaire ou d'une matrice.

Dans la première partie, on établit une généralisation de la notion pour une application linéaire quelconque. Dans la deuxième partie, on se place dans le cadre des espaces $\mathbb{R}^n$ euclidiens. On définit alors la notion de pseudo-inverse.

Dans la troisième partie on étudie le cas d'un système linéaire, ce qui permet de définir la notions de pseudo-solution, et de claculer la pseudo-inverse d'une matrice.

Dans la quatrième partie, on utilise la matrice $A\ {}^tA$ pour obtenir la pseudo-inverse d'une autre façon.

PARTIE I

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions quelconques non nécéssairement finies, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Soit E' un supplémentaire de $Keru$ et F" un supplémentaire de Imu.

1.a) Prouver que u définit un isomorphisme de E' sur Imu.

1.b) Soit $y \in F$. Prouver qu'il existe un couple unique $(x', y') \in E' \times F'$ tel que $y = u(x') + y'$. On pose $x' = v(y)$.

2.a) Prouver que l'on définit ainsi une application linéaire $v \in \mathcal{L}(F, E)$.

2.b) Que dire lorsque u est un isomorphisme ?

3) Déterminer $Keru$, Imv et prouver que $uvu = u$ et que $vuv = v$.

4) Prouver que uv et vu sont des projecteurs dont on précisera le noyau et l'image.

5) Prouver que réciproquement si $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifie $uvu = u$ et $vuv = v$, alors on a : $E = Keru \oplus \operatorname{Im} v$ et $F = Imu \oplus \ker v$.

6) On munit $\mathbb{R}^2$ de la base canonique (e_1, e_2), et l'on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $E' = Vect(te_1 + e_2)$ et $F' = Vect(e_1 + te_2)$ où $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer dans ce cas l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^2$ défini aux questions précédentes. On pourra déterminer v par sa matrice dans la base canonique.

Désormais, et pour toute la suite du problème, on prend $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, que l'on munit de leur produit scalaire usuel qu'on notera $(\ |\ )$.

PARTIE II

1) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

1.a) Justifier l'existence d'une unique application linéaire $u^- \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ *(l'énoncé du concours comportait une erreur intervertissant n, et p, qui a été rétablie ici)* telle que $Keru^- = (Imu)^\perp$, $Imu = (Keru)^\perp$, $uu^-u = u$, $u^-uu^- = u^-$.

On nommera cette application la pseudo inverse de u.

1.b) Préciser $(u^-)^-$.

1.c) Prouver que uu^- et u^-u sont des projecteurs autoadjoints.

2) Soit réciproquement $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $uvu = u$, $vuv = v$, et tel que uv et vu soient des projecteurs autoadjoints.

2.a) Montrer que $Kervu = Keru$ et $Imvu = Imv$.

2.b) En déduire que $v = u^-$.

R^n et $\mathbb{R}^p$ étant rapportés à leur base canonique, soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, l'application linéaire de matrice A dans ces bases. On note A^- la matrice associée à l'application linéaire u^-.

3) Prouver que A^- est caractérisée par les égalités : $A^-AA^- = A^-$, $AA^-A = A$, ${}^t(AA^-) = AA^-$, ${}^t(A^-A) = A^-A$.

4) Déterminer $({}^tA)^-$ en fonction de A^-.

5) Déterminer A^- POUR $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de la forme $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $A' \in GL_r(\mathbb{R})$ est une matrice carrée inversible de taille r.

PARTIE III

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ deux matrices colonnes. On s'intéresse au système : (S) $AX = Y$.

Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ étant rapportés à leur base canonique, A définit une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$; Les colonnes X, Y étant associées à des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$. On dit que X est la pseudo-solution du système (S) si l'on a $X = A^-Y$.

1) Dans cette question on considère le cas particulier : $A = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3\sqrt{2}}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 13 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$

1.a) Justifier que le système (S) n'admet pas de solution.

1.b) Déterminer $KerA$, ImA puis le projeté orthogonal du vecteur Y sur ImA. En déduire la pseudo-solution de ce système. On sera amené à déterminer les antécédents par A du vecteur $(7, -1, 10)$.

2) Prouver que si $Y \in ImA$, la pseudo-solution de (S) est une solution de (S).

3.a) Prouver que si X est la pseudo-solution du système S, alors X est une solution du système : (S_1) $AX = Y'$ où $Y' = JY$, J étant la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur ImA.

3.b) Prouver que X est la pseudo-solution du système S si et seulement si il existe une solution Z au système : S_2 $A^tAZ = Y'$ telle que $X =^t AZ$.

On cherche maintenant une solution du système : (S_2) $A^tAZ = Y'$.

4) Prouver qu'il existe une matrice de passage $P \in GL_p(\mathbb{R})$, telle que le système (S_2) soit équivalent au système (S_3) : (S_3) $\begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1' \\ 0 \end{pmatrix}$ où $r = rgA$, B' étant une matrice carrée de taille r inversible et Y_1', $Z_1' \in \mathcal{M}_{r,1}$, $Z_2' \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$, $Z = P \begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{pmatrix}$ et $Y = P \begin{pmatrix} Y_1' \\ 0 \end{pmatrix}$.

5) Donner une expression de X à l'aide de A, P, B', Y_1' et Z_2'.

6) Justifier que X ne dépend pas de Z_2'.

7) En déduire que : $A^- = {}^tAPB^-P^{-1}$ où $B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8) On suppose P et P^{-1} décomposées par blocs sous la forme $P = (P_1, P_2)$ où $P_1 \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ où $Q_2 \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Déterminer A^- à l'aide de P_1, Q_1, B' et ${}^tA$.

PARTIE IV

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1) Justifier que ${}^tAA$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On note S l'ensemble des valeurs propres non nulles de ${}^tAA$, et P_λ, la matrice dans la base canonique de la projection orthogale sur le sous- espace propre associé à $\lambda \in S$; on pose $A_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} AP_\lambda$.

2.a) Prouver que ${}^tAA = \sum_{\lambda \in S} \lambda P_\lambda$.

2.b) Prouver que $A^-A = \sum_{\lambda \in S} P_\lambda$.

2.c) Puis que $A = \sum_{\lambda \in S} \sqrt{\lambda} A_\lambda$.

3.a) Calculer ${}^tA_\lambda A_\lambda$. En déduire A_λ^- en fonction de ${}^tA_\lambda$. (on pourra utiliser la caractérisation obtenue à la question II.3).

3.b) Prouver que ${}^tA_\lambda A_\mu = A_\lambda\, {}^tA_\mu = 0$ pour $\lambda \neq \mu$.

4) Déduire des questions précédentes : $A' = \sum_{\lambda \in S} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, {}^tA_\lambda$.

5) Déterminer la pseudo-inverse de la matrice : $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 3 \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

FIN DU PROBLÈME