ENSAI - Session 2000

EPREUVE DE MATHEMATIQUE I - (4 H)

L'usage des calculatrices est interdit

L'énoncé original contient quelques erreurs qui ont été corrigées ici.

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensembles des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des endomorphismes bijectifs de E.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, une partie A de E est dite stable par f si $f(A) \subset A$.

Un polynôme non nul de $\mathbf{C}[X]$ est dit unitaire si son coefficient dominant vaut 1.

On note Π_f le polynôme minimal de f et $P_f(X) = \det(X\,id - f)$ son polynôme caractéristique.

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique* s'il existe un entier naturel non nul p et un vecteur $a \in E$ tels que :

$$C_a^p = \{a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\}$$

soit une partie génératrice de E de cardinal p, stable par f, c'est à dire :

$$\begin{cases} C_a^p \text{ possède } p \text{ éléments deux à deux distincts,} \\ f(C_a^p) \subset C_a^p. \end{cases}$$

Une telle partie C_a^p est nommée cycle de f et on dit alors que f est *cyclique d'ordre* p.

PARTIE I

1. Pour quel(s) entier(s) n un projecteur h peut-il être cyclique ? Comment s'écrit alors un cycle de h ?

2. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$.

a. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est cyclique et expliciter un cycle de f.
Déterminer le rang de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b. Mêmes questions avec l'endorphisme g de $\mathbf{C}^n$ de matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & -1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique d'ordre p.

a. Justifier que $p \geq n$.

b. Montrer que f est au moins de rang $n-1$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et C_a^p un cycle de f.
Soit m le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{F} = (a, f(a), \dots, f^{m-1}(a))$ soit libre.

a. Prouver que $\forall\, k \geq m,\ f^k(a) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

b. En déduire que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.

c. Montrer que $\Pi_f = P_f$.

5. Montrer que si f est bijectif et si C_a^p est un cycle de f, alors $f^p(a) = a$.

6. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

On suppose que 1 n'est pas valeur propre de f.
Déterminer les valeurs (si elles existent) de a et b pour que f soit cyclique d'ordre 2.

7. Soit $\theta \in I\!R \setminus \pi\mathbf{Z}$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ de matrice dans la base canonique :

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Montrer que r est cyclique si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbf{Q}$.

PARTIE II

Dans cette partie on se propose de caractériser les endomorphismes cycliques inversibles.

1. Soit $f \in GL(E)$ un endomrphisme cyclique et C_a^p un cycle de f.

a. Montrer que $f^p = id$ et en déduire que f est diagonalisable.

b. Montrer que le polynôme $P_f (= \Pi_f$ d'après I.4c.) divise $X^p - 1$ et que p est le plus petit entier k non nul tel que P_f divise $X^k - 1$.

2. Réciproquement, on considère un endomorphisme bijectif $f \in GL(E)$ tel que P_f divise $X^p - 1$ et p soit le plus petit entier k non nul tel que P_f divise $X^k - 1$.

a. Montrer que $\Pi_f = P_f$. (On pourra utiliser la décomposition en facteurs irréductibles de Π_f et P_f.)

b. Montrer que f est diagonalisable.

c. Soit $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs propres de f et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i$ un vecteur de E tel que $\forall\, i,\ x_i \neq 0$.
Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre.

d. Montrer que f est cyclique et que C_x^p est un cycle.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Trouver un polynôme anulateur de degré 2 de f.

b. f est-il cyclique ?

PARTIE III

Dans cette partie on se propose de caractériser les endomorphismes cycliques non inversibles.

1. Soit f cyclique d'ordre p non inversible et C_a^p un cycle de f.

a. Vérifier que $\dim \mathrm{Ker} f = 1$.

b. Montrer que $f^p(a) \neq a$.

Soit $j \in [\![1; p-1]\!]$ tel que $f^p(a) = f^j(a)$.

c. Montrer que $f^p = f^j$.

d. Montrer que $P_f (= \Pi_f$ d'après I.4.c.) est de la forme $X^j\, Q(X)$ où Q est un polynôme qui divise $X^{p-j} - 1$.

Réciproquement, soit f un endomorphisme de E et j un entier non nul tel que :

$$\Pi_f = P_f = X^j\, Q$$

où Q est un polynôme qui divise $X^q - 1$ et aucun des polynômes $X^k - 1$ pour $1 \leq k < q$.

2. Montrer que si Q est un polynôme constant, alors f est cyclique.

On suppose désormais que degré $Q \geq 1$.

3.a. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f^j) \oplus \mathrm{Ker}(f^q - id)$.

b. Justifier que les sous-espaces $E_1 = \mathrm{Ker}(f^j)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f^q - id)$ sont stables par f.

On note f_1 et f_2 les endomorphismes induits par f sur E_1 et E_2.

4.a. Prouver que f_2 est cyclique d'ordre q. Soit $C_{a_2}^q$ un cycle de f_2.

b. Prouver que $\{f^j(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2)\}$ engendre E_2.

5.a. Montrer que $P_f = P_{f_1}\, P_{f_2}$ et en déduire que $\dim E_1 = j$.

b. Montrer que $f_1^{j-1} \neq 0$.

c. En déduire qu'il existe $a_1 \in E_1$ tel que $(a_1, f(a_1), \ldots, f^{j-1}(a))$ est une base de E_1.

6. Soit $a = a_1 + a_2$; montrer que C_a^{j+q-1} est un cycle de f.

7. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & j \end{pmatrix}$$

où $j = \exp \dfrac{2i\pi}{3}$. Montrer que f est cyclique et déterminer un cycle.

$* + * + * + * + * + * + *$