Si le candidat détecte ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, le corps de scalaires est $\mathbb{R}$. Si X et Y sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des applications linéaires de X dans Y et on note $|||f|||$ la norme opérateur (norme triple) usuelle de toute application linéaire continue $f \in \mathcal{L}(X,Y)$. In notera toujours I l'application identité, quel que soit l'espace sous-jacent, $\mathrm{Tr}(u)$ la trace d'un endomorphisme u sur un espace vectoriel de dimension finie et $\det(u)$ son déterminant. Le déterminant d'une matrice carrée A sera noté $\det(A)$. Enfin, $A^\perp$ désignera l'orthogonal (au sens du produit scalaire sous-jacent) d'un sous espace A.
Soit E un espace normé, on dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est inconditionnellement convergente dans E si, pour tout choix de signes $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n x_n$ est convergente dans E.

Partie I.

1) Démontrer qu'une série de réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est inconditionnellement convergente si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est convergente.

2) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, à quelle condition sur $\|x_n\|$, une série $\sum x_n$ de E est inconditionnellement convergente ? (on démontrera le résultat annoncé).

On note c_0 l'espace des suites réelles convergentes vers 0, que l'on munit de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$, avec $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On rappelle que c'est un espace de Banach.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $x^{(n)} \in c_0$ par $x_k^{(n)} = \frac{1}{n+1}$ si $k = n$ et 0 sinon. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)}$ est inconditionnellement convergente dans c_0.

4) Conclure.

Partie II : lemme de Lewis.

Dans cette partie, $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension n, où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit ℓ_2^n comme l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. La norme est donc $\left\|(x_i, \dots, x_n)\right\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$. On note β_0 la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Soit
$$K = \{u \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) \quad | \quad |||u||| = 1\}$$
On fixe une base β de E. Pour $u \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on définit $\Phi(u) = |\det(A)|$ où A est la matrice représentative de u dans les bases β_0 et β.

1) Montrer qu'il existe $u_0 \in K$ tel que $\sup_{u\in K} \Phi(u) = \Phi(u_0)$

2) Montrer que u_0 est inversible.

3) On fixe $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ et $\epsilon > 0$. Montrer que $\left|\det(I + \epsilon u_0^{-1} \circ v)\right| \leqslant (1 + \epsilon |||v|||)^n$.

4) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout réel t, on a $\det(I + tf) = 1 + t\,\mathrm{Tr}(f) + o(t)$.

5) En déduire que u_0 vérifie : pour tout $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leqslant n|||v|||$
Que vaut $\sup\{\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \mid v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) \text{ avec } |||v||| \leqslant 1\}$?

Partie III : lemme de Dvoretzky-Rogers.

On reprend les notations de la partie II.

1) Soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Soit F un sous-espace de ℓ_2^n de dimension i. On note $P \in \mathcal{L}(\ell_2^n)$ la projection orthogonale sur $F^\perp$.

– 1-a) Montrer que $\dfrac{n-i}{n} \leqslant |||u_0 \circ P|||$.

– 1-b) En déduire qu'il existe $y \in F^\perp$ tel que $\|u_0(y)\| \geqslant \dfrac{n-i}{n}$ et $\|y\|_2 = 1$.

2) Construire une base orthonormale $(y_1, \ldots, y_n)$ de ℓ_2^n telle que $\|u_0(y_j)\| \geqslant \dfrac{n-j+1}{n}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

3) Soit $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ où $\left[\frac{n}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$. On définit les vecteurs de E : $v_i = \|u_0(y_i)\|^{-1}.u_0(y_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

Montrer que pour tous $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right\| \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)^{1/2}$

Partie IV : théorème de Dvoretzky-Rogers.

Dans cette partie, $(X, \|.\|)$ désigne un espace de Banach de dimension infinie.

On fixe une suite de réels positifs $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ converge. On pose $c = 2\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2\right)^{1/2}$.

1) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $n_0 = 0$ vérifiant $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_k} c_n^2 \leqslant c^2 4^{-k}$ pour tout entier k.

2) Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de X de norme 1 telle que pour tout entier k et pour tous réels $a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}} \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\left\|\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i v_i\right\| \leqslant 2\left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^2\right)^{1/2}$

3) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de X telle que $\|x_n\| = c_n$ et telle que la série $\sum x_n$ soit inconditionnellement convergente dans X

4) En déduire que dans un espace de Banach de dimension infinie, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs telle $\sum x_n$ est inconditionnellement convergente dans X et la série $\sum \|x_n\|$ diverge.

Partie V : "unicité" dans le lemme de Lewis.

On reprend les notations de la partie II. On rappelle que $\ell_2^n = \mathbb{R}^n$, muni de sa tructure euclidienne canonique. u_0 est l'application construite dans la partie II.

1) Montrer que pour tout endomorphisme orthogonal w de $\mathbb{R}^n$, $u_0 \circ w$ a les mêmes propriétés que u_0 : on rappelle que u_0 est inversible, $|||u_0||| = 1$ et pour tout $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leqslant n|||v|||$.

2) Soit $f \in GL(\mathbb{R}^n)$ (on rappelle qu'il s'agit de l'ensemble des endomorphismes inversibles de $\mathbb{R}^n$).

- 2-a) Montrer qu'il existe un endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$, symétrique défini positif tel que $f^* \circ f = s \circ s$.
- 2-b) Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^n$ et un endomorphisme s symétrique défini positif tel que $f = u \circ s$.

On suppose qu'il existe $u_1 \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ ayant les mêmes propriétés que u_0 : u_1 est inversible, $|||u_1||| = 1$ et pour tout $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_1^{-1} \circ v) \leqslant n|||v|||$.

3) Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^n$ et un endomorphisme s symétrique défini positif tel que $u_1 = u_0 \circ u \circ s$.

4) Montrer que $\det(s) = 1$ et que $\mathrm{Tr}\,(s^{-1}) \leqslant n$.

5) Montrer que si $t_1, \ldots, t_n > 0$, alors $\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k$. Etudier le cas d'égalité.

6) Conclure.

Partie VI : Opérateurs absolument sommants.

Soient X et Y deux espaces vectoriel normés dont on note respectivement les normes $\|.\|$ et $\|.\|'$. Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, on note $\Lambda(T)$ l'ensemble des constantes $C \geqslant 0$ telles que pour tout choix d'un nombre fini de vecteurs $x_1, \ldots, x_p \in X$, on a

$$\sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\|' \leqslant C \sup\left\{ \Big\| \sum_{j=1}^{p} \epsilon_j x_j \Big\| \;;\; \epsilon_1, \ldots, \epsilon_p \in \{-1, 1\} \right\}$$

On dit que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est absolument sommante si $\Lambda(T)$ est non vide.

1) Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ absolument sommante. Montrer que $\Lambda(T)$ admet un plus petit élément que l'on notera $\pi(T)$

2) Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ absolument sommante. Montrer que T est continue et comparer $|||T|||$ et $\pi(T)$

3) Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Montrer que l'ensemble des applications absolument sommantes de X dans Y est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$ et que $T \mapsto \pi(T)$ est une norme sur cet espace.

4) Soit X l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme sup usuelle : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On désigne par Y l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$. Soit J l'application de X dans Y qui à toute fonction continue sur $[0,1]$ associe elle-même.
Montrer que J est absolument sommante et calculer $\pi(J)$.

5) Montrer (de façon élémentaire) que l'identité de c_0 n'est pas absolument sommante.

6) Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E.

- 6-a) Montrer que $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, où $M_P = \sup \left\{ \Big\| \sum_{j=0}^{p} \epsilon_j x_j \Big\| ; \epsilon_0, \dots, \epsilon_p \in \{-1, 1\} \right\}$
- 6-b) En déduire que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est inconditionnellement convergente dans E alors la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- 6-c) Soient $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ absolument sommante et une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ inconditionnellement convergente dans X. Que peut on dire de $\left(\|T(x_j)\|' \right)_{j\in\mathbb{N}}$?

7) A quelle condition nécessaire et suffisante l'identité d'un espace de Banach est absolument sommante ?