

SESSION 2010

Filière PC

PHYSIQUE PC1

ENS de Paris

Durée : 6 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Ces dernières années, des expériences réalisées sur des gaz d'atomes refroidis par laser ont permis d'étudier le comportement de systèmes quantiques bidimensionnels. Ces études ont montré que ces systèmes possédaient des propriétés originales par rapport à leurs homologues tridimensionnels, en particulier l'existence d'une transition de phase associée à la formation spontanée de tourbillons. Dans cet énoncé, on aborde quelques aspects de ces expériences. Les trois parties sont en grande partie indépendantes, les résultats des deux dernières questions de la première partie étant réutilisés dans la seconde. La première partie traite de l'interaction lumière matière et introduit les techniques de manipulation d'atomes par laser. Dans la deuxième nous préciserons comment réaliser un système bidimensionnel en confinant fortement les atomes. Enfin, dans la troisième partie nous présenterons certains des résultats expérimentaux obtenus sur ces gaz à deux dimensions.

Notations : les vecteurs sont notés en gras et $\partial_x f = \partial f / \partial x$. Par ailleurs on représentera une fonction oscillante $A(t)$ par une fonction complexe $\underline{A}(t)$ telle que

$$A(t) = \text{Re}(\underline{A}(t)),$$

avec $\underline{A}(t) = A_0 e^{-i\omega t}$.

Données numériques

m_e	$9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
\hbar	$1.05 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
k_B	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
$1/4\pi\epsilon_0$	$9 \times 10^9 \text{ J.m.C}^{-2}$
γ_{Rb}	$40 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$
λ_{Rb}	780 nm
m_{Rb}	$1.45 \times 10^{-25} \text{ kg}$

Formulaire

On a les identités suivantes

$$\mathbf{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{A}.$$

$$\text{div}(f \mathbf{A}) = f \text{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} f.$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}.$$

Gradient en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{grad} f = \partial_r f \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta f \mathbf{u}_\theta + \partial_z f \mathbf{u}_z$$

Laplacien $\Delta f = \text{div}(\mathbf{grad} f)$ d'une fonction radiale $f(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ en coordonnées cylindriques

$$\Delta f = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f).$$

Élément de surface en coordonnées polaires (r, θ) , $d^2 S = r dr d\theta$.

1 Interaction lumière-matière

1. *Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.* On modélise un atome d'hydrogène par un électron de masse m_e et de charge q_e gravitant autour d'un proton supposé infiniment lourd.

Q1. Donner l'expression de la force s'exerçant sur l'électron. De quelle énergie potentielle dérive t'elle ?

Q2. En supposant que l'électron obéit aux lois de la dynamique classique, calculer la vitesse de l'électron sur une orbite circulaire de rayon r .

Q3. Dédurre de la question précédente l'expression de l'énergie mécanique E_m en fonction du module du moment cinétique L , de la masse m_e de l'électron, de q_e et de ε_0 .

Q4. Pourquoi ce modèle dit planétaire entre-t'il en contradiction avec les lois de l'électromagnétisme ?

Pour contourner cette difficulté, Niels Bohr a postulé que seules étaient stables les trajectoires pour lesquelles le moment cinétique était égal à $n\hbar$, où $\hbar = h/2\pi$ est la constante de Planck réduite et n est un entier positif.

Q5. Dédurre de ce principe que les niveaux d'énergies permis sont quantifiés.

Q6. Calculer en eV l'énergie du niveau fondamental, ainsi que le rayon a_0 de la trajectoire classique correspondante. L'électron est-il relativiste ?

Q7. Donner l'expression de la longueur d'onde λ d'un photon résonnant avec la transition entre l'état fondamental et le premier état excité. En déduire l'expression du rapport λ/a_0 à l'aide de la constante de structure fine $\alpha = q_e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$.

Q8. Préciser la dimension et la valeur de α . Qu'en déduit-on pour le rapport λ/a_0 ?

2. *Modèle de l'électron élastiquement lié. Polarisabilité d'un atome.* Afin de simplifier l'étude du couplage de l'atome à un champ électromagnétique, on décrit l'interaction de l'atome avec le rayonnement par le modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié dans lequel on modélise à présent la force de liaison entre le noyau et l'électron par une force de rappel linéaire $-m_e\omega_0^2\mathbf{r}$, où \mathbf{r} désigne la position de l'électron par rapport au noyau supposé immobile. On suppose par ailleurs que le mouvement de l'électron est amorti par une force de frottement visqueux $-m_e\gamma\mathbf{v}$, où $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ désigne la vitesse de l'électron.

Q9. Préciser les dimensions de ω_0 et γ .

Q10. Quelle est l'origine de la force dissipative introduite dans la dynamique ?

Q11. On excite l'atome par une onde électromagnétique polarisée rectilignement que l'on écrit en notations complexes

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

À l'aide des équations de Maxwell dans le vide, donner la structure du champ électromagnétique de l'onde. Préciser en particulier le rapport des amplitudes des champs électriques et magnétiques.

Q12. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour l'électron. On explicitera et justifiera notamment les éventuelles simplifications apportées aux équations du mouvement.

Q13. Résoudre l'équation précédente en régime sinusoïdal forcé. En déduire que le dipôle électrique \mathbf{p} de l'atome peut s'écrire

$$\underline{\mathbf{p}} = \chi(\omega) \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

où l'on donnera l'expression de $\chi(\omega)$ en fonction des paramètres du problème.

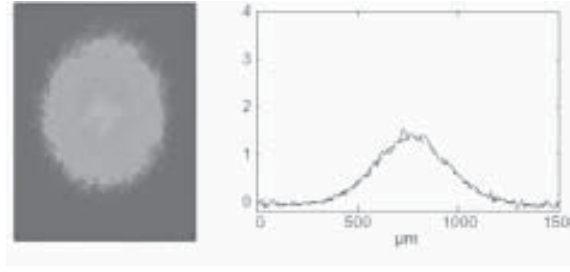


FIG. 1 – Profil de densité optique d'un nuage de rubidium après une expansion libre de 20 ms. À droite : coupe du profil de densité.

Q14. Tracer l'allure de la partie réelle et de la partie imaginaire de χ que l'on notera dans la suite χ' et χ'' .

Q15. Pour $\Delta = \omega - \omega_0$ grand en valeur absolue devant γ , montrer que χ' domine χ'' .

Q16. Calculer la puissance moyenne P de la force exercée par le champ électrique sur l'électron en fonction de ω , E_0 et χ'' .

Q17. Montrer que P est maximale pour $\omega = \omega_0$. Comment interpréter ce résultat dans une description corpusculaire de la lumière ?

Q18. On considère que l'onde se propage selon la direction z . Donner l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting \mathbf{R} de l'onde incidente en fonction de E_0 , ϵ_0 et c .

Q19. On pose $\sigma = P/R$. Quelle est sa dimension et son expression en fonction de χ'' , ω , ϵ_0 et c ?

Q20. On considère l'absorption de l'onde par une assemblée d'atomes répartis selon une densité $n(\mathbf{r})$ s'annulant pour $\mathbf{r} \rightarrow \infty$. En effectuant un bilan d'énergie dans une tranche d'épaisseur dz et de surface d^2S , montrer que

$$\partial_z R = -n\sigma R.$$

Q21. Résoudre cette équation et montrer que la mesure de $R(x, y, z = \pm\infty)$ permet d'avoir accès à la densité atomique intégrée $\bar{n}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, y, z) dz$.

Q22. On admet pour le moment que les techniques de manipulation d'atomes par la lumière permettent de confiner une vapeur d'atomes dans le vide. Sur la Figure 1, on considère un gaz de 10^6 atomes de taille initiale $\sim 10 \mu\text{m}$. À $t = 0$ on supprime le potentiel de piégeage. Donner un ordre de grandeur de la densité d'atomes initiale dans le nuage et montrer que l'on peut supposer que les atomes évoluent librement.

Q23. La figure 1 représente une image en fausses couleurs du profil de densité intégré \bar{n} du nuage après 20 ms d'expansion et mesuré par la technique décrite ci-dessus. Dédurre de la taille du nuage un ordre de grandeur de la température des atomes dans le piège.

3. *Forces radiatives.* On s'intéresse à présent aux forces subies par un atome placé dans un champ électromagnétique monochromatique dont le champ électrique complexe a pour forme générale

$$\underline{E}(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_0(\mathbf{r}) e^{i(\varphi(\mathbf{r}) - \omega t)},$$

où \underline{E}_0 est un vecteur à composantes réelles.

Q24. Montrer que la force s'exerçant sur l'atome peut s'écrire

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \text{grad}) \mathbf{E} + \dot{\mathbf{p}} \wedge \mathbf{B}.$$

Q25. On note $\langle A \rangle$ la valeur moyenne temporelle d'une grandeur périodique $A(t)$. Que vaut $\langle \dot{A} \rangle$?
À l'aide d'une des équations de Maxwell, en déduire que

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \langle (\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{p} \wedge (\mathbf{rot} \mathbf{E}) \rangle.$$

Q26. Déduire des questions précédentes que pour $|\Delta| \gg \gamma$, on peut écrire cette force comme

$$\langle \mathbf{F} \rangle \sim \frac{\chi'}{4} \mathbf{grad} E_0^2.$$

Q27. Expliquer pourquoi cette force porte le nom de force dipolaire. Montrer que celle-ci dérive de l'énergie potentielle

$$E_p \sim \frac{q_e^2 E_0^2}{8m_e \omega_0 \Delta}.$$

Discuter selon le signe de Δ si l'atome est repoussé ou attiré par les zones de forte intensité lumineuse.

2 Optique gaussienne, pièges dipolaires

1. *Faisceau Gaussien* : On considère un faisceau laser monochromatique polarisé rectilignement dans la direction x et se propageant dans le vide dans la direction z et dont on met le champ électrique sous la forme

$$\underline{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{u}_x,$$

où $\omega = ck$ et \mathcal{E} est éventuellement complexe.

Q28. Dédire des équations de Maxwell que le champ électrique \underline{E} vérifie une équation d'onde.

Q29. Écrire l'équation satisfaite par \mathcal{E} .

Q30. Dans un faisceau laser typique, comparer les distances caractéristiques de variation de l'intensité lumineuse dans les directions x , y et z . En déduire que l'équation précédente peut se simplifier en

$$2ik\partial_z \mathcal{E} + \Delta_{\perp} \mathcal{E} = 0,$$

dite équation de l'enveloppe lentement variable où $\Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Q31. On cherche les solutions de cette équation sous la forme d'un profil gaussien

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = A(z) \exp(-kr^2/q(z)),$$

avec $r^2 = x^2 + y^2$, et où A et q sont deux fonctions de z à valeurs complexes. Tracer l'allure du profil d'intensité $I(r, z)$ du faisceau à z fixé. Soit $\delta(z)$ la mi-largeur à $1/e^2$ du faisceau définie par $I(\delta(z), z) = I(0, z)/e^2$. Donner la valeur de $\delta(z)$ en fonction de k et de $q(z) = q_r + iq_i$.

Q32. Montrer que $A(z)$ et $q(z)$ sont solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} iA' - 2A/q &= 0 \\ iq' + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Q33. Donner l'expression de $q(z)$ en fonction de z et $q_0 = q(0)$. Montrer que par un choix de l'origine des z , on peut choisir q_0 réel, hypothèse que l'on supposera satisfaite par la suite.

Q34. Dédire des questions précédentes l'expression de $A(z)$ (on introduira $A_0 = A(z=0)$).

Q35. En utilisant les résultats précédents, préciser l'expression de $\delta(z)$ en fonction de $\delta_0 = \delta(z=0)$ et $z_R = \pi\delta_0^2/\lambda$, où λ désigne la longueur d'onde du rayonnement.

Q36. Tracer l'allure de $\delta(z)$. Préciser et interpréter son comportement aux grandes valeurs de z .

Q37. Quel est le diamètre typique d'un faisceau laser ? En déduire un ordre de grandeur pour z_R dans le cas d'un laser émettant dans le domaine optique.

Q38. A l'aide des questions précédentes, dans quelle mesure peut-on décrire la lumière émise par un laser par un faisceau parallèle ? Que se passe-t-il à grande distance ?

Q39. À l'aide des questions précédentes, discuter la validité de l'approximation de l'enveloppe lentement variable.

Q40. Montrer que dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable on peut écrire que $\text{rot} \underline{E} \sim ik \mathbf{u}_z \wedge \underline{E}$. En déduire l'expression du champ magnétique \underline{B} de l'onde.

Q41. Dédire de la question précédente l'expression de la valeur moyenne temporelle $\langle \mathbf{R} \rangle$ du vecteur de Poynting.

Q42. Calculer le flux de $\langle \mathbf{R} \rangle$ à travers le plan $z=0$. En déduire l'expression de la puissance P du faisceau laser en fonction de A_0 , δ_0 , ε_0 et c .

2. *Caractéristiques d'un piège dipolaire.* On place des atomes de rubidium dans un faisceau laser gaussien de longueur d'onde $\lambda = 1064$ nm et de puissance $P = 10$ W focalisé sur $\delta_0 = 100$ μm . On note m_{Rb} , γ_{Rb} et λ_{Rb} la masse, le coefficient d'amortissement ainsi que la longueur d'onde de la résonance de l'atome de rubidium.

Q43. Avec les notations de la première partie, calculer le rapport $\Delta/\gamma_{\text{Rb}}$. En déduire que l'atome subit essentiellement l'effet de la force dipolaire et montrer que celle-ci attire l'atome vers le point de focalisation du faisceau.

Q44. Montrer que la profondeur du puits de potentiel vu par les atomes vaut

$$\Delta E_p = \frac{q_e^2 P}{2\pi\epsilon_0 m_e \delta_0^2 c \omega_{0,\text{Rb}} |\Delta|}.$$

Q45. Faire l'application numérique. Rappeler l'énergie cinétique typique par particule dans un gaz parfait. À quelle température faut-il refroidir les atomes afin de pouvoir les contenir dans le puits de potentiel (on note k_B la constante de Boltzmann) ?

3. *Réseau optique.* On considère à présent deux faisceaux gaussiens contre-propageants de vecteurs d'onde \mathbf{k} et $-\mathbf{k}$ parallèles à z , de même amplitude A_0 et focalisés au même point $z = 0$.

Q46. Donner l'expression du champ électrique total en un point \mathbf{r} de l'espace.

Q47. Calculer l'énergie potentielle $E_p(\mathbf{r})$ vue par les atomes. Montrer que celle-ci s'écrit comme le produit d'une sinusoïde par une enveloppe dont on donnera l'expression. Comparer la période de la sinusoïde à z_R . En déduire que l'on peut négliger localement les variations de $A(z)$ que l'on supposera par la suite constant.

Q48. Montrer que si la température des atomes est suffisamment basse, par un choix judicieux de l'origine des positions et des énergies on peut écrire l'énergie E_p sous la forme

$$E_p(\mathbf{r}) = \frac{m_{\text{Rb}}}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2),$$

où m_{Rb} désigne la masse d'un atome de rubidium. Donner alors l'expression des pulsations propres d'oscillation $\omega_{x,y,z}$ dans les directions x, y, z en fonction de m_{Rb} , ΔE_p , k et δ_0 .

Q49. Que dire du rapport des pulsations ω_x et ω_z ?

Q50. On admet que si l'on prend en compte le caractère quantique du mouvement de l'atome, alors les énergies permises sont $\hbar\omega_z(n + 1/2)$, où n est un entier positif. Si la température du nuage est petite devant $\hbar\omega_z$, alors l'agitation thermique est insuffisante pour franchir l'écart séparant le niveau fondamental des états excités. La dynamique des atomes est alors gelée dans la direction z et l'on peut alors considérer le système comme étant bidimensionnel. Donner un ordre de grandeur de la température en dessous de laquelle les atomes entrent dans ce régime.

3 Physique des gaz d'atomes froids à deux dimensions

Dans cette dernière partie, on s'intéresse à quelques propriétés physiques d'un gaz bidimensionnel d'atomes. Nous considérerons dans un premier temps le profil de densité dans un piège harmonique, et nous verrons ensuite comment des expériences d'interférences atomiques permettent de mettre en évidence une transition de phase propre aux systèmes à deux dimensions.

1. *Condition d'équilibre d'un système thermodynamique.* On considère un gaz bidimensionnel que l'on sépare en deux régions de volumes V_1 et V_2 . On suppose le gaz homogène dans chacun des volumes.
Q51. On suppose que le nombre de particules et l'énergie interne du volume i varient de dN_i et dU_i . Écrire la variation d'entropie dS_i du gaz dans la région i (on notera T_i et μ_i la température et le potentiel chimique dans la région i).
Q52. Que vaut la variation d'entropie du système $V_1 + V_2$? Que vaut-elle à l'équilibre ?
Q53. En utilisant les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de matière, écrire la condition d'équilibre sur les μ_i et les T_i .
Q54. En déduire que pour un système à l'équilibre, le potentiel chimique et la température sont uniformes.
2. *Profil de densité du nuage.* On cherche ici à décrire le profil de densité du nuage. On admet que pour un gaz bidimensionnel d'atomes confinés par un champ de force dérivant d'une énergie potentielle $E_p(\mathbf{r})$, l'équation d'état liant le potentiel chimique à la densité surfacique n_{2D} s'écrit à basse température

$$\mu = gn_{2D}(\mathbf{r}) + E_p(\mathbf{r}),$$

où g est une constante caractérisant la force des interactions entre atomes.

- Q55.** À partir de la définition du potentiel chimique, interpréter les différents termes de μ .
- Q56.** On considère le cas d'un potentiel harmonique $V(\mathbf{r}) = \kappa r^2/2$. En utilisant les questions précédentes, donner l'expression du profil de densité surfacique n_{2D} et tracer son allure. Préciser le rayon R_0 du nuage en fonction de μ et κ .
- Q57.** Déduire de la question précédente l'expression de μ en fonction de g , κ et du nombre total N d'atomes piégés.
3. *Interférences atomiques.* On rappelle que du point de vue de la mécanique quantique, les atomes possèdent un comportement à la fois particulaire et ondulatoire. On associe ainsi à une particule d'énergie cinétique E et de quantité de mouvement \mathbf{p} une onde de vecteur d'onde \mathbf{q} et de pulsation ω donnés par les relations de Planck-Einstein

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \hbar \mathbf{q} \\ E &= \hbar \omega. \end{aligned}$$

On considère deux nuages piégés dans deux plans adjacents du réseau optique et à $t = 0$ on éteint brusquement le potentiel de piégeage. Puisque le confinement dans la direction z est important, on admet que lorsque le piège est éteint, l'énergie associée au mouvement selon z domine les autres directions, et l'on peut par conséquent considérer les atomes immobiles dans le plan (x, y) , et se déplaçant uniquement dans la direction z .

Q58. Quelle est la vitesse d'une particule partie de $M_{\pm}(x, y, \pm d/2)$ et observée à l'instant t en un point $M(x, y, z)$? En déduire l'expression $\varphi_{\pm}(M) = qM_{\pm}M - \omega t$ de la phase accumulée par l'onde de matière entre le point M_{\pm} et le point M .

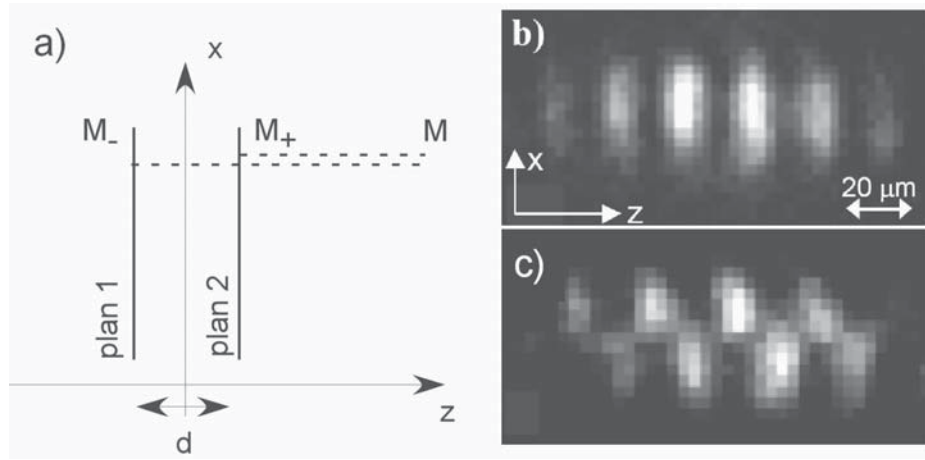


FIG. 2 – a) principe de l'expérience. Droite : Profils expérimentaux de densité du nuage atomique après 12 ms d'expansion libre. b) Nuage à basse température. c) Nuage au voisinage de la transition BKT (Extrait de S. Stock et al., Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 190403, <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0506559>)

Q59. Dédurre de la question précédente que le déphasage des ondes issues de M_+ et M_- peut s'écrire

$$\delta\varphi = \frac{mdz}{\hbar t},$$

Q60. La figure (2.b) présente le profil de densité du nuage atomique après une expérience du type de celle décrite ci-dessus. Interpréter les observations et en déduire l'écart séparant les deux plans avant expansion.

4. *Équation de Schrödinger et vortex quantiques. Transition BKT.* On montre que dans les gaz de bosons bidimensionnels, il existe une transition de phase, dite transition BKT (Berezinski-Kosterlitz-Thouless) associée à la nucléation spontanée de tourbillons dans le nuage. En dessous de la température de transition T_{BKT} , on admet qu'un nuage de N particules peut être décrit par une seule fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ satisfaisant l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\psi = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\psi + E_p(x, y)\psi,$$

où $E_p(x, y)$ désigne l'énergie potentielle des atomes dans le plan (x, y) . En utilisant l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, on admet que $\rho = N|\psi|^2$ décrit la densité de particules dans le gaz.

Q61. À l'aide de l'équation de Schrödinger, montrer que ρ obéit à une équation de la forme

$$\partial_t\rho + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

avec

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\mathbf{grad}\chi,$$

et χ est l'argument de ψ .

Quelle loi physique cette équation traduit-elle? En déduire une interprétation physique du champ \mathbf{v} .

Indication : On pourra montrer à partir du formulaire que

$$\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^* = \operatorname{div} (\psi^* \mathbf{grad} \psi - \psi \mathbf{grad} \psi^*),$$

où ψ^* désigne le complexe conjugué de ψ .

Q62. Calculer la circulation de \mathbf{v} sur un contour joignant deux points A et B en fonction de \hbar , m et $\Delta\chi = \chi(B) - \chi(A)$.

Q63. On considère le cas où $A = B$. Montrer que $\Delta\chi$ est égal à $2\pi n$, avec n entier.

Q64. En déduire que la circulation du champ \mathbf{v} sur un contour fermé est quantifiée et vaut $\Gamma_n = nh/m$.

Q65. *Champ de vitesse du tourbillon.* On considère un champ de vitesse \mathbf{v} tourbillonnaire, à symétrie de révolution autour de l'origine. Par un argument de symétrie, donner la direction du vecteur vitesse dans le repère des coordonnées polaires $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$.

Q66. On suppose que la circulation du champ de vitesse autour de l'origine vaut h/m . En déduire l'expression du champ de vitesse en coordonnées polaires (r, θ) .

Q67. Déduire de la question précédente l'expression de χ en coordonnées polaires.

Q68. Que dire du signe de la fonction d'onde lorsque l'on tourne de π autour du cœur du tourbillon ? Comment interpréter le résultat de la figure (2.c), où l'on suppose qu'un des plans abrite un tourbillon analogue à celui qui vient d'être étudié.

Fin de l'épreuve

