ULC 533

SESSION 2005

Filière PC (groupe PC)

Epreuve commune aux ENS de Lyon et Cachan

Filières MP et PC (groupe I)

Epreuve optionnelle commune aux ENS de Paris et Lyon

PHYSIQUE PC 2

Durée : 5 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Présentation

Nous allons nous intéresser aux suspensions de particules dans un fluide comme, par exemple, des émulsions d'un fluide dans un autre, des solutions colloïdales telles que la peinture ou certains gels, ou encore des poussières dans l'atmosphère. Ces suspensions ont un certain nombre de propriétés physiques communes dont nous allons étudier quelques aspects. Dans tout le problème, on considère que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme.

☐ *Remarques préliminaires*

- Les quatre parties sont largement indépendantes. Une bonification sera systématiquement accordée aux candidats ayant répondu de manière correcte à toutes les questions d'une sous-partie.
- Dans la correction, une grande attention sera portée aux remarques de caractère physique, à la clarté de la rédaction ainsi qu'à la présentation.
- Il est demandé aux candidats de rappeler les numéros identifiant une question avant d'en proposer la solution.

Tournez la page S.V.P.

- La circulaire n° 99 018 du 1er février 1999 autorise l'usage des calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

□ *Formulaire*

- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02.10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38.10^{-23}\mathrm{J.K}^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = N_A k_B$
- Viscosité dynamique de l'eau à la température de $20°C$: $\eta = 10^{-3}\mathrm{Pa.s}$
- On rappelle que pour $|x| \ll 1$:

$$(1+x)^u = 1 + ux + \frac{u(u-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

I Equilibre d'une particule solide dans un fluide

1. On considère un liquide au repos dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. Ce liquide est supposé incompressible de masse volumique ρ. On note z la <u>profondeur</u> mesurée à partir de la surface libre du liquide correspondant à $z = 0$. La pression à la surface du liquide est P_0.

   a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par la pression $P(z)$ qui décrit l'équilibre du liquide dans le champ de pesanteur.

   b) En déduire le champ de pression $P(z)$ dans le liquide.

   c) On considère une particule solide immobile complètement immergée dans le liquide. Cette particule sphérique est supposée homogène, de masse volumique ρ_p et de rayon a. Le barycentre de la particule est à l'altitude z_p. Calculer la résultante $\vec{F}_A$ des forces de pression agissant sur la particule.

   d) En ne considérant que les forces de pesanteur et de pression qui agissent sur la particule, préciser à quelle condition celle-ci reste au repos.

   e) Discuter brièvement le mouvement de la particule lorsque cette condition d'équilibre n'est pas satisfaite.

2. On suppose maintenant que le fluide est l'atmosphère, assimilée à un gaz parfait de masse molaire M, de masse volumique $\rho(z)$, et de température uniforme T. On note $P(z)$ la pression, z représentant maintenant l'<u>altitude</u> mesurée depuis le sol. La pression au sol est P_S.

   a) Déterminer, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, la pression $P(z)$ de l'air. On note λ la longueur caractéristique qui apparaît dans l'expression de $P(z)$.

   b) Réécrire λ et $P(z)$ en faisant apparaître la constante de Boltzmann k_B ainsi que la masse effective m_a d'une "molécule d'air" définie comme le rapport M/N_A. En déduire le nombre de "molécules" par unité de volume $n(z)$ et interpréter ce résultat.

   c) Estimer la longueur λ pour l'air.

d) On recherche maintenant les conditions d'équilibre d'une particule solide dans l'atmosphère en ne considérant toujours que les forces de pesanteur et de pression. Le barycentre de la particule est à l'altitude z_p. Cette particule sphérique est supposée homogène, de masse volumique ρ_p et de rayon a inférieur au millimètre. Etablir une expression approchée de $P(z)$. En déduire la résultante $\vec{F}_R$ des forces de pression sur la particule.

e) Quelle devrait être alors la masse volumique de la particule pour que $\vec{F}_R$ puisse compenser le poids de la particule ? Comment expliquez-vous que des poussières puissent rester en suspension dans l'air ?

3. Dans cette question, on suppose que la masse volumique ρ du fluide considéré est uniforme. La position de la particule solide est repérée par son altitude $z > 0$. On admet que la probabilité de trouver une particule solide de masse volumique $\rho_p > \rho$ et de volume V, entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$, s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathcal{P}(z) = A \exp\left[-\frac{(\rho_p - \rho)Vgz}{k_B T}\right] \mathrm{d}z$$

où A est une constante.

a) Quelle est la valeur de $\int_{z=0}^{z\to+\infty} \mathrm{d}\mathcal{P}(z)$? En déduire la valeur de la constante A.

b) L'altitude moyenne z_m de la particule est donnée par l'intégrale :

$$z_m = \int_{z=0}^{z\to+\infty} z\mathrm{d}\mathcal{P}(z)$$

Calculer z_m. Analyser le rôle joué par la température.

c) On s'intéresse à une particule sphérique de rayon a dans un fluide qui occupe l'espace $z > 0$. La surface définie par $z = 0$ correspond à une interface solide. On considère que la particule est en suspension si son altitude moyenne est supérieure à son rayon. En déduire la valeur limite a_ℓ du rayon d'une particule en suspension. On exprimera a_ℓ en fonction de k_B, T, ρ_p, ρ et g.

d) On se place à une température de 20°C. Calculer ce rayon limite pour une particule d'oxyde de silice de masse volumique $\rho_p = 2,6.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ en suspension dans l'eau, puis dans l'air. Quelle devrait être la masse volumique d'une particule de $10\,\mu\mathrm{m}$ de rayon pour qu'elle soit en suspension dans l'eau ?

II Ecoulement d'un fluide autour d'une particule solide

Nous considérons une particule solide sphérique de rayon a qui est maintenue immobile dans le référentiel du laboratoire. Un fluide incompressible de masse volumique ρ s'écoule en régime stationnaire autour de la particule. Loin de la particule, le mouvement du fluide est rectiligne uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{e}_z$ et sa pression vaut P_0. On néglige dans cette partie l'effet de la gravité, sauf dans les questions **II.1.e** et **II.2.g**.

1. On suppose tout d'abord que le fluide est parfait.

a) Rappeler ce qu'est un fluide parfait incompressible et donner les équations différentielles vérifiées par le champ de vitesse.

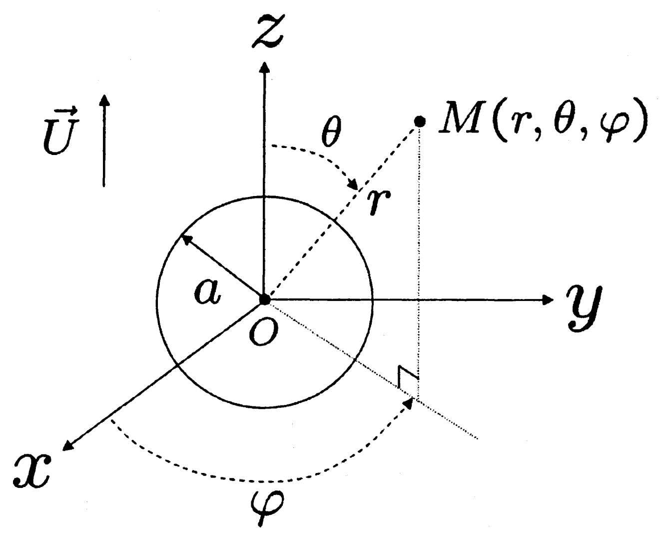

FIG. 1 – Notations utilisées.

b) On considère un référentiel galiléen $(Oxyz)$ dont l'origine O est attachée au centre de la sphère. On s'intéresse au champ de vitesse en coordonnées sphériques (r, θ, φ) (voir Fig.1) :

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

On admet que la solution pour le champ de vitesse considéré s'écrit, au point $M(r, \theta, \varphi)$, sous la forme :

$$v_r = \left(B + \frac{C}{r^3}\right) \cos\theta$$
$$v_\theta = -\left(B - \frac{C}{2r^3}\right) \sin\theta$$
$$v_\varphi = 0$$

où r est la distance du point M au centre de la sphère. B et C sont des constantes. Préciser les conditions aux limites que doit satisfaire ce champ de vitesse. En déduire la valeur des constantes B et C, ainsi que le champ de vitesse correspondant.

c) Déterminer le champ de pression $p(r, \theta)$. Quelles sont les propriétés de symétrie de ce champ ? Quelle est la force exercée par le fluide sur la particule sphérique ?

d) On considère maintenant que, loin de la particule, le fluide est au repos par rapport à un référentiel galiléen $(O'xyz)$ et que la particule est en mouvement avec une vitesse $\vec{U}_p = U_p \vec{e}_z$. Dans le référentiel $(O'xyz)$, exprimer le champ de vitesse du fluide autour de la particule et déterminer l'énergie cinétique totale du fluide. Discuter ce résultat. Par la suite, on admet que la relation obtenue entre l'énergie cinétique totale du fluide et la vitesse de la particule reste valable en régime non stationnaire.

e) On se place maintenant dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. Le fluide est initialement au repos dans le référentiel galiléen $(O'xyz)$. On lâche avec une vitesse initiale nulle une particule sphérique immergée dans le fluide et de masse volumique

ρ_p. Effectuer un bilan énergétique pour le système "particule + fluide" entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse U_p dans laquelle on fera explicitement apparaître ρ, ρ_p et g. Commenter ce résultat.

2. On considère maintenant que le fluide possède une viscosité dynamique η constante.

a) Rappeler l'expression de la force surfacique visqueuse (ou force de cisaillement) dans un fluide dont le champ de vitesse est de la forme $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$.

b) Dans un fluide visqueux en écoulement stationnaire autour d'une sphère immobile et pour de faibles nombres de Reynolds ($Re = \rho|U|a/\eta \ll 1$), on admet que les champs de vitesse et de pression s'écrivent au point $M(r,\theta,\varphi)$:

$$\begin{aligned}
v_r &= \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3}\right) U\cos\theta \\
v_\theta &= -\left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3}\right) U\sin\theta \\
v_\varphi &= 0 \\
p &= P_0 - \frac{3}{2}\frac{\eta U a}{r^2}\cos\theta
\end{aligned}$$

Préciser les conditions aux limites vérifiées par les champs de vitesse et de pression. Discuter les différences notables avec le cas du fluide parfait.

c) Déterminer la force $\vec{F}_P$ exercée par le fluide sur la particule, due aux forces de pression uniquement.

d) L'expression générale de la force de cisaillement exercée par le fluide sur la particule n'est pas simple. Pour comprendre ce qu'il se passe dans un proche voisinage de l'interface entre la particule et le fluide, on introduit une nouvelle variable ε telle que $r = a + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll a$. Donner l'expression du champ de vitesse à l'ordre le plus bas en ε. Quel type d'écoulement existe-t-il au voisinage de la sphère au premier ordre en ε ?

e) En déduire l'expression de la force de cisaillement $\vec{F}_V$ exercée par le fluide sur la particule.

f) Exprimer finalement la force totale $\vec{F}_T$ exercée par le fluide visqueux sur la sphère.

g) On suppose maintenant que le fluide est au repos et d'extension infinie. Décrire, sous l'effet du champ de pesanteur, le mouvement d'une particule sphérique immergée dans le fluide, de vitesse initiale nulle et de masse volumique ρ_p. Pour cela, on négligera l'énergie cinétique du fluide et on admettra que la force de frottement atteint instantanément la valeur obtenue à la question **II.2.f**. Définir un temps caractéristique τ_c et une vitesse caractéristique U_c associés à ce mouvement. Donner l'expression de τ_c et U_c en faisant apparaître explicitement ρ_p et a. Estimer les valeurs de τ_c et U_c dans l'eau pour des particules d'oxyde de silice de masse volumique $\rho_p = 2,6.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ et de rayons $0,1\,\mu\mathrm{m}$, $10\,\mu\mathrm{m}$ et $1\,\mathrm{mm}$. Discuter la validité des estimations obtenues.

III Agitation thermique et frottement visqueux

Sous certaines conditions, l'agitation thermique permet à des particules solides de rester en suspension dans l'air ou dans l'eau. Nous avons par ailleurs établi que ces particules sont soumises à une force de frottement d'origine visqueuse qui s'oppose à leur mouvement. Pour comprendre quelle est l'influence de la viscosité sur le mouvement d'une particule sensible à l'agitation thermique, nous allons étudier un modèle simple introduit par Paul Langevin (1908). On considère le mouvement à une dimension d'une particule de masse m le long d'un axe Ox (on note x et v les valeurs algébriques de la position et de la vitesse de la particule) soumise à une force "aléatoire" $F(t)$ et à une force de frottement $f = -\alpha v$, où α est une constante positive. Il n'y a pas de pesanteur dans ce modèle simple.

1. Montrer que l'équation du mouvement de la particule peut se mettre sous la forme :

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(xv) = mv^2 - \alpha xv + xF(t)$$

2. Compte tenu du caractère complexe de la force aléatoire $F(t)$, nous ne cherchons pas à résoudre directement l'équation du mouvement. En fait, sous certaines hypothèses, le mouvement "moyen" de la particule dépend peu de la forme exacte de la force aléatoire. Pour accéder à ce mouvement "moyen", on imagine qu'un grand nombre de particules se trouve initialement à la position $x = 0$ à l'instant $t = 0$. Chaque particule vérifie, indépendamment des autres, l'équation du mouvement de la question précédente. En revanche, à chaque instant, la valeur de la force aléatoire diffère *a priori* d'une particule à l'autre.

L'opérateur mathématique noté $< .. >$ permet de représenter symboliquement, à un instant donné, la valeur moyenne sur toutes les particules des grandeurs x, v, xv, etc. Le caractère aléatoire de la force $F(t)$ se traduit alors par $< F > (t) = 0$. De plus, la position de la particule n'étant pas corrélée à la force, on a $< xF >=< x >< F >$. Enfin, comme cet opérateur agit à un instant donné, on suppose qu'il commute avec l'opérateur de dérivée temporelle, soit : $\dfrac{\mathrm{d} < .. >}{\mathrm{d}t} =< \dfrac{\mathrm{d}..}{\mathrm{d}t} >$.

- **a)** Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $< xv >$.
- **b)** Pour un gaz de particules de masse m à la température T, donner la moyenne temporelle du carré d'une composante cartésienne de la vitesse, notée $\overline{v_x^2}$. Dans le reste de question **III.2**, on admettra que $< v^2 >= \overline{v_x^2}$.
- **c)** Compte tenu des conditions initiales, résoudre l'équation vérifiée par $< xv >$.
- **d)** En déduire $< x^2 > (t)$.
- **e)** Définir un temps caractéristique τ séparant deux régimes dans l'évolution temporelle de $< x^2 >$. Préciser l'évolution temporelle aux temps courts et aux temps longs. Commenter le mouvement "moyen" obtenu dans chaque régime. Que peut-on dire de l'effet combiné du frottement et de l'agitation thermique ? On posera dans la suite $D = k_B T/\alpha$.

3. On s'intéresse dans cette question uniquement au comportement aux temps longs. On généralise, pour un mouvement à trois dimensions relativement à un repère cartésien $(Oxyz)$, le résultat obtenu pour le modèle à une dimension en supposant que :

$$< x^2 > (t) =< y^2 > (t) =< z^2 > (t)$$

a) Quelle propriété du système peut-on invoquer pour justifier cette hypothèse ?

b) Déterminer $< r^2 > (t)$, où r représente la distance de chaque particule au point O, en faisant apparaître le coefficient D.

c) Déterminer le temps τ_D mis par une particule pour se déplacer en moyenne d'une distance égale à son diamètre $2a$.

d) On considère une particule sphérique de rayon a dans un liquide de viscosité η. Donner l'expression de τ_D en fonction de k_B, T, η et a.

e) Calculer la valeur de τ_D dans l'eau pour des particules sphériques de rayons $0,1\,\mu$m, $10\,\mu$m et 1 mm à la température de 20°C. Que peut-on en conclure sur la dynamique de telles particules en suspension ?

IV Equilibre d'une goutte de liquide avec sa vapeur

Dans certains cas, les particules en suspension ne sont pas solides, mais liquides. Un équilibre thermodynamique s'établit alors entre la goutte de liquide et la phase fluide environnante. Nous allons aborder les principes physiques qui gouvernent ce type d'équilibre en traitant le cas particulier d'un corps pur. L'objectif de cette partie est donc de décrire l'équilibre d'une goutte liquide d'un corps pur avec sa phase vapeur.

Considérons une enceinte, de volume V, fermée par un piston pouvant coulisser librement. Cette enceinte, en contact avec l'atmosphère où règne une pression P_0 et une température T_0, renferme un système thermodynamique considéré comme <u>fermé</u>.

1. On s'intéresse tout d'abord aux propriétés générales d'un corps pur sous une seule phase (gazeuse ou liquide). On note $U(S, V, n)$ l'énergie interne et $G(T, P, n)$ l'enthalpie libre de ce corps, où S est l'entropie et n le nombre de moles de cette phase.

a) Rappeler la relation existant entre l'enthalpie libre G, l'énergie interne U, la pression P, la température T, le volume V et l'entropie S. Exprimer, pour un système <u>fermé</u>, les différentielles dU et dG.

b) En utilisant la propriété d'extensivité de G, montrer que l'on peut écrire :

$$G = n\mu(T, P) \quad \text{avec :} \quad \mu(T, P) = \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{T,P}$$

$\mu(T, P)$ est l'<u>enthalpie libre molaire</u>, aussi appelée potentiel chimique.

c) Exprimer, pour un système <u>ouvert</u>, la différentielle dG en fonction de V, P, T, S, μ et n. En déduire la différentielle dU pour un système ouvert.

d) Montrer que :

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T = \frac{V}{n}$$

e) On note $\mu_v(T_v, P_v)$ l'enthalpie libre molaire de la phase gazeuse à la pression P_v et à la température T_v. Déterminer, pour cette phase assimilée à un gaz parfait, l'expression de la différence :

$$\mu_v(T_v, P_v) - \mu_v(T_v, P_{sat}(T_v))$$

où $P_{sat}(T_v)$ est la pression de vapeur saturante à la température T_v.

f) On note $\mu_\ell(T_\ell, P_\ell)$ l'enthalpie libre molaire de la phase liquide à la pression P_ℓ et la température T_ℓ. Déterminer, pour un liquide incompressible dont le volume molaire est noté v_ℓ, l'expression de la différence :

$$\mu_\ell(T_\ell, P_\ell) - \mu_\ell(T_\ell, P_{sat}(T_\ell))$$

2. On suppose qu'une goutte de liquide sphérique de rayon r s'est formée dans l'enceinte et se trouve à l'équilibre thermodynamique avec le reste du corps pur sous phase gazeuse. La pression de la phase gazeuse est notée P_v et sa température T_v. Pour des raisons qui apparaîtront plus claires dans la suite, P_v n'est pas forcément égale à la pression de vapeur saturante $P_{sat}(T_v)$. La pression de la phase liquide est notée P_ℓ et sa température T_ℓ. On note U_v, S_v et V_v l'énergie interne, l'entropie et le volume de la phase gazeuse. On note les mêmes grandeurs U_ℓ, S_ℓ et V_ℓ pour le liquide. On admet que l'énergie interne totale du système comprend une contribution supplémentaire $U_A = \gamma A_\ell$, où γ est une grandeur positive et A_ℓ l'aire de la goutte.

a) Préciser la dimension de γ. Indiquer des grandeurs physiques qui ont la même dimension.

b) Pour un système fermé en contact avec un milieu extérieur de température T_0 et de pression P_0 fixées, on définit la fonction $G^* = U + P_0 V - T_0 S$, où U et S sont l'énergie interne et l'entropie du système. Montrer que G^* est minimum à l'équilibre.

c) Donner l'expression de G^* en fonction de U_ℓ, U_v, U_A, V_v, V_ℓ, S_v, S_ℓ, P_0 et T_0.

d) En déduire la différentielle $\mathrm{d}G^*$ en fonction des différentielles $\mathrm{d}V_v$, $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}S_v$, $\mathrm{d}S_\ell$ et $\mathrm{d}n_\ell$. On remarque que les grandeurs V_v, V_ℓ, S_v, S_ℓ et n_ℓ peuvent varier indépendamment les unes des autres. Trouver les conditions d'équilibre mécanique et thermique du système. Discuter notamment la relation obtenue entre la pression de la phase vapeur et celle de la phase liquide.

e) Dans toute la suite du problème, on suppose que l'équilibre mécanique et thermique est réalisé. Donner alors l'expression correspondante de $\mathrm{d}G^*$, que l'on notera $\mathrm{d}G^0$. Donner la condition d'équilibre des quantités de matière des phases liquide et gazeuse. Déterminer le sens d'évolution du système lorsque cette condition d'équilibre n'est pas satisfaite.

f) La phase liquide est supposée incompressible. La pression de vapeur saturante, $P_{sat}(T_0)$, représente la pression d'équilibre entre la phase liquide et la phase vapeur lorsque leur interface est plane ($r \to \infty$). Montrer que l'équilibre des quantités de matière entre la phase gazeuse et la phase liquide sous une pression $P_0 \neq P_{sat}$ détermine un rayon d'équilibre r_e de la goutte liquide qui vérifie la relation de Kelvin :

$$\ln x = \beta \left(x - 1 + \frac{\delta}{r_e} \right)$$

où $x = P_0/P_{sat}(T_0)$. On exprimera β et δ en fonction des paramètres du problème T_0, $P_{sat}(T_0)$, γ, R et v_ℓ.

g) Pour l'eau, $P_{sat} = 10^5$Pa à la température de 100°C. Montrer qu'à cette température $\beta \ll 1$ et préciser à quelle condition il existe une goutte d'eau. Pour cela, on aura avantage à s'appuyer sur une représentation graphique. Ces résultats restent-ils valables pour de hautes températures ?

3. Pour mieux comprendre ce que représente le rayon d'équilibre r_e obtenu précédemment, on s'intéresse au potentiel thermodynamique $G^0(r)$, fonction du rayon de la goutte de liquide.

a) Montrer que ce potentiel peut s'écrire :

$$G^0 = -\Delta\mu^0 n_\ell + \gamma A_\ell + \text{Cste}$$

où on a posé $\Delta\mu^0 = \mu_v(P_0, T_0) - \mu_\ell(P_0, T_0)$.

b) Déterminer la dépendance en r de $\Delta G^0(r) = G^0(r) - G^0(r = 0)$.

c) Représenter graphiquement $\Delta G^0(r)$ dans les deux cas : $P_0 > P_{sat}(T_0)$ et $P_0 < P_{sat}(T_0)$. Dans chaque cas, et en fonction des valeurs de r, déterminer le sens d'évolution spontanée de r. Dans le cas où $\Delta G^0(r)$ passe par un maximum, déterminer le rayon r_c pour lequel la valeur maximale est atteinte et déterminer $\Delta G^0(r_c)$. A quoi peut-on comparer $\Delta G^0(r_c)$?

d) Calculer numériquement $\Delta\mu^0$, r_c et $\Delta G^0(r_c)$ à 100°C pour $P_0/P_{sat} = 1,001$; $P_0/P_{sat} = 1,01$; $P_0/P_{sat} = 1,1$. Pour l'eau, on donne $\gamma = 5,9.10^{-2}\,\text{N.m}^{-1}$ et $P_{sat} = 10^5\text{Pa}$ pour une température de 100°C. Commenter ces résultats.

e) Expliquer pourquoi il est possible de trouver de la vapeur d'eau sans phase liquide à la température T_0 pour des pressions $P_0 > P_{sat}(T_0)$. Proposer au moins un mécanisme physique susceptible de faire apparaître la phase liquide.