SESSION 2003
Filière PC
MATHEMATIQUES

Epreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan
Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement , est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Les définitions importantes sont signalées par un signe $\rightsquigarrow$. Les résultats admis sont encadrés par des $\bullet$. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et tout entier naturel k, on note simplement $\mathcal{C}^k(I) = \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs réelles. L'espace des fonctions continues, $\mathcal{C}^0(I)$, est noté $\mathcal{C}(I)$. Si I est un intervalle fermé $[a, b]$, on note de plus $\mathcal{C}_0(I)$ l'espace des fonctions continues sur I s'annulant en a et b, et $\mathcal{C}_0^k(I)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, nulles en a et b ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k. De façon analogue, $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ admettant des limites nulles en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k.

Dans tout le problème, E est une fonction à valeurs réelles de deux variables réelles, notées q et p, et E est supposée au moins de classe $\mathcal{C}^3$, c'est-à-dire $E \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les dérivées partielles premières de E sont ainsi notées

$$\frac{\partial E}{\partial q}(q,p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial p}(q,p),$$

et les dérivées partielles secondes de E

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(q,p), \quad \frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(q,p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(q,p).$$

Le problème concerne la minimisation de l'intégrale

$$\int_I E(\rho(x), \rho'(x))\, dx$$

pour ρ appartenant à un ensemble $\mathcal{A}$ de fonctions admissibles à préciser (inclus dans $\mathcal{C}^1(I)$).

I Résultats préliminaires

1 Un lemme fondamental

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}^1([a,b]) \bigcap \mathcal{C}_0([a,b]) = \{h \in \mathcal{C}^1([a,b]) \; ; \; h(a) = h(b) = 0\}.$$

i)
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}([a,b])$ telles que, pour tout $h \in \mathcal{B}$,

$$\int_a^b f(x)h'(x)\,dx = 0.$$

Indication : on pourra utiliser des fonctions h de la forme

$$h(x) = \int_a^x (f(t) - c)\,dt$$

ii)
Déterminer, en utilisant i), l'ensemble des couples $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b])$ tels que, pour tout $h \in \mathcal{B}$,

$$\int_a^b (f(x)h(x) + g(x)h'(x))\,dx = 0.$$

Parmi ces couples, peut-on avoir $g(x) = |x - (a+b)/2|$?

2 Mesure des courbes et surfaces

i)
On considère un arc de courbe défini par une équation cartésienne,

$$\Gamma = \{(x, \varphi(x))\ ;\ x \in [a,b]\},$$

avec $a < b$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$. quelle est la longueur de l'arc Γ ?

ii)
Soient $\alpha \in]0, 2\pi[$ et $R > r > 0$. Quelle est l'aire de

$$S = \{(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\ ;\ r \le \rho \le R \text{ et } 0 \le \omega \le \alpha\}?$$

iii)
On suppose que l'arc Γ défini en i) ne coupe pas l'axe Ox et on considère Σ la surface de révolution obtenue par rotation de Γ autour de cet axe.

• On admet que l'aire de Σ est égale à

$$A = 2\pi \int_a^b \varphi(x)\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\,dx. \qquad \bullet$$

Vérifier cette formule dans le cas où Γ est un segment de droite. On pourra s'aider d'un dessin, et utiliser ii).

3 Méthode de séparation des variables

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que $G \in \mathcal{C}^1(J)$ ne s'annule pas. Soient $a \in I$, $\alpha \in J$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(I, J)$ telle que $\rho(a) = \alpha$ et

$$\rho'(x) = G(\rho(x))$$

pour tout $x \in I$. Calculer

$$\int_\alpha^{\rho(x)} \frac{dr}{G(r)}.$$

II Minimisation sur un intervalle I borné

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Comme dans la partie I, on notera

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}^1([a,b]) \bigcap \mathcal{C}_0([a,b]).$$

A toute fonction $\rho \in \mathcal{C}^1([a,b])$ on associe le nombre réel

$$\mathcal{E}[\rho] = \int_a^b E(\rho(x), \rho'(x))\, dx$$

1

Soient ρ et $h \in \mathcal{C}^1([a,b])$. On considère $e_{\rho,h}$, la fonction d'une variable réelle t définie par

$$e_{\rho,h}(t) = \mathcal{E}[\rho + th].$$

Montrer que $e_{\rho,h} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et exprimer ses dérivées en 0

$$\frac{\mathrm{d}e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t}(0) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2 e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t^2}(0)$$

à l'aide de ρ, ρ', h, h' et des dérivées partielles de E.

2

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\rho \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $\rho(a) = \alpha$ et $\rho(b) = \beta$, réalisant le minimum de $\mathcal{E}[\rho]$ sous cette contrainte, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}[\rho] = \min_{\eta \in \mathcal{A}} \mathcal{E}[\eta], \quad \text{où } \mathcal{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\eta \in \mathcal{C}^1([a,b])\ ;\ \eta(a) = \alpha,\ \eta(b) = \beta\}. \tag{1}$$

i)
Soit $h \in \mathcal{B}$. Quelle est alors la valeur de

$$\frac{\mathrm{d}e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t}(0)?$$

ii)
Déduire de ce qui précède que la fonction

$$x \in [a,b] \mapsto \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))\right) = \frac{\partial E}{\partial q}(\rho(x), \rho'(x)) \tag{2}$$

pour tout $x \in [a,b]$.

$\rightsquigarrow$ Désormais, on appelle **extrémale** de $\mathcal{E}$ toute fonction $\rho \in \mathcal{A}$, au moins de classe $\mathcal{C}^2$, telle que l'équation (2) soit satisfaite pour tout $x \in [a,b]$.

iii)
Soit ρ une extrémale de $\mathcal{E}$. Calculer

$$E(\rho(b), \rho'(b)) - \rho'(b)\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(b), \rho'(b)) - E(\rho(a), \rho'(a)) + \rho'(a)\frac{\partial E}{\partial p}(\rho(a), \rho'(a))$$

3

On se place dans le même cadre qu'à la question **2** ci-dessus, en supposant que (1) a lieu pour ρ de classe $\mathcal{C}^2$.

i)

Soit $h \in \mathcal{B}$. Quelle est le signe de

$$\frac{\mathrm{d}^2 e_{\rho,h}}{\mathrm{d}t^2}(0)?$$

ii)

Déduire de ce qui précède que, pour tout $h \in \mathcal{C}^1([a,b]) \bigcap \mathcal{C}_0([a,b])$:

$$\int_a^b \Big(P(x)h'(x)^2 + Q(x)h(x)^2\Big)\, dx \geq 0, \tag{3}$$

avec

$$P(x) = \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(\rho(x), \rho'(x)), \quad Q(x) = \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(\rho(x), \rho'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(\rho(x), \rho'(x))\right). \tag{4}$$

A quelle(s) classe(s) $\mathcal{C}^k$ appartiennent P et Q ? On notera par la suite

$$\mathcal{Q}[h] = \int_a^b \Big(P(x)h'(x)^2 + Q(x)h(x)^2\Big)\, dx.$$

4 Exemples

i)

Dans cette question, on considère la fonction $E(q,p) = \sqrt{1+p^2}$. A quoi correspond, en langage commun, le problème de minimisation de $\mathcal{E}$? Trouver toutes les fonctions ρ satisfaisant l'équation (2). Montrer qu'il en existe une et une seule appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}$ et l'expliciter. Pour cette solution et les fonctions P, Q définies par (4), l'inégalité (3) est-elle satisfaite ?

ii)

Dans cette question, on considère la fonction $E(q,p) = q\sqrt{1+p^2}$. A quoi correspond le problème de minimisation de $\mathcal{E}$? Montrer que, si ρ satisfait (2), il existe une constante C telle que

$$\rho'(x)^2 = \frac{\rho(x)^2 - C^2}{C^2}. \tag{5}$$

Supposons $0 < C < \alpha < \beta$. Montrer, en utilisant la méthode de séparation de variables de la question **I.3**, que la recherche de fonctions $\rho \in \mathcal{A}$, strictement croissantes et satisfaisant (5) sur $[a,b]$, se ramène au calcul de la primitive d'une fonction que l'on explicitera.

NB : le calcul de la primitive n'est pas demandé.

5 Etude de $\mathcal{Q}[h]$

On cherche ici des conditions sur les fonctions P et Q assurant l'inégalité (3), c'est-à-dire, avec la notation introduite à la question **3. ii)**,

$$\mathcal{Q}[h] \geq 0 \quad \text{quel que soit } h \in \mathcal{C}^1([a,b]) \bigcap \mathcal{C}_0([a,b]). \tag{6}$$

i)

Montrer que (6) implique

$$P(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [a,b]. \tag{7}$$

Indication : on pourra construire une famille de fonctions auxiliaires $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^1([-\varepsilon, \varepsilon])$, où $\varepsilon > 0$ est un paramètre destiné à tendre vers 0 telles que

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(x)^2\, dx \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon'(x)^2\, dx \geq \frac{C}{\varepsilon},$$

pour un certain $C > 0$ indépendant de ε.

ii)

Supposons qu'il existe une fonction $w \in \mathcal{C}^1([a,b])$ satisfaisant

$$P(x)(Q(x) + w'(x)) = w(x)^2 \tag{8}$$

pour tout $x \in [a,b]$. A-t-on alors (6) ? (On pourra interpréter (8) comme l'annulation du discriminant d'une forme quadratique.)

iii) Etude de l'équation (8)

On suppose ici

$$P(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

Etant donné $w \in \mathcal{C}^1([a,b])$, une solution u de l'équation différentielle du premier ordre

$$Pu' + wu = 0$$

peut-elle s'annuler ? Si une telle solution u est de classe $\mathcal{C}^2$, exprimer $(Pu')'$ sans utiliser u'.

On suppose qu'il existe une solution v de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation différentielle du second ordre

$$-(Pv')' + Qv = 0 \tag{9}$$

ne s'annulant pas sur $[a,b]$. Construire alors $w \in \mathcal{C}^1([a,b])$ vérifiant (8) pour tout $x \in [a,b]$.

III Minimisation sur un intervalle I infini

Dans toute cette partie, la fonction E est choisie de la forme

$$E(q,p) = F(q) + \frac{1}{2}K(q)p^2, \tag{10}$$

où les fonctions F et $K \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ satisfont les propriétés supplémentaires

$$K(q) \geq K_0 > 0, \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

$$\begin{cases} F(q) > 0, \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha, \beta\}, \\ F(\alpha) = F(\beta) = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q}(\alpha) = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q}(\beta) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}q^2}(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}q^2}(\beta) > 0 \end{cases} \tag{12}$$

On suppose pour fixer les idées $\alpha < \beta$.

1 Préambule

i)

Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale de degré 4 et de coefficient dominant 1 satisfaisant (12).

ii)

Pour tout nombre $\theta > 0$, on définit $\mathcal{A}_\theta^k(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions $\rho \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} \rho(x) - \alpha = \mathcal{O}(e^{\theta x}) & \text{et, pour tout } m \leq k, \quad \rho^{(m)}(x) = \mathcal{O}(e^{\theta x}) & \text{lorsque } x \to -\infty, \\ \rho(x) - \beta = \mathcal{O}(e^{-\theta x}) & \text{et, pour tout } m \leq k, \quad \rho^{(m)}(x) = \mathcal{O}(e^{-\theta x}) & \text{lorsque } x \to +\infty. \end{cases} \tag{13}$$

Montrer que, si $\rho \in \mathcal{A}_\theta^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $x \mapsto E(\rho(x), \rho'(x))$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on définit

$$\mathcal{E}[\rho] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\rho(x), \rho'(x))\, dx$$

$\rightsquigarrow$ Par extension de la définition donnée à la question **II.2.ii)**, on appelle extrémale de $\mathcal{E}$ une fonction ρ appartenant à $\mathcal{A}_\theta^2(\mathbb{R})$ pour au moins un nombre $\theta > 0$ et satisfaisant (2) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

iii)

Montrer que pour toute extrémale de $\mathcal{E}$, on a

$$\frac{1}{2} K(\rho(x)) \rho'(x)^2 = F(\rho(x)) \tag{14}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Etude de l'équation (14)

i) Exemple

On suppose dans cette question que K est la fonction constante égale à K_0 et F la fonction polynomiale de la question **1.i)** ci-dessus. En s'inspirant de la méthode de séparation de variables de la question **I.3**, calculer ρ satisfaisant (14) et

$$\lim_{x \to -\infty} \rho(x) = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \rho(x) = \beta.$$

Déterminer les couples (θ, k) pour lesquels $\rho \in \mathcal{A}_\theta^k(\mathbb{R})$.

ii)

On revient au cas général. Montrer qu'il existe une fonction $G \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R}^+)$ telle que

$$G(q)^2 = \frac{2F(q)}{K(q)}$$

pour tout $q \in [\alpha, \beta]$. Montrer de plus que

$$\begin{cases} G(q) > 0, \quad \text{pour tout } q \in]\alpha, \beta[, \\ G(\alpha) = G(\beta) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\beta) < 0. \end{cases} \tag{15}$$

• On admettra que (15) suffit pour construire $\rho \in \mathcal{A}_\theta^1(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} \rho'(x) = G(\rho(x)), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases}$$

avec

$$\theta < \min\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\alpha), -\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q}(\beta) \right),$$

quel que soit $\rho_0 \in]\alpha, \beta[$. •

A quels $\mathcal{A}_\theta^k(\mathbb{R})$ appartient cette fonction ρ ?

3

Désormais, ρ désigne une solution croissante de (14), construite grâce à la question **2.ii)** ci-dessus. On associe à ρ les fonctions P et Q comme dans la partie **II**, par les formules (4).

i)

Exprimer les fonctions P et Q à l'aide des fonctions K, F et ρ. Montrer que P et Q sont bornées sur $\mathbb{R}$, et que

$$P(x) \geq K_0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

ii)

Montrer que la fonction $v = \rho'$ est solution de l'équation différentielle (9) sur $\mathbb{R}$.

iii)

Montrer qu'il existe C_1 et $C_2 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| K(\rho(x)) \frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} \right| \leq C1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(K(\rho(x)) \frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} \right) \right| \leq C2.$$

iv)

Soit $\omega > 0$. En s'inspirant des question **II.5.ii)** et **II.5.iii)**, montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(P(x) h'(x)^2 + Q(x) h(x)^2 \right) dx \geq 0,$$

pour tout $h \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} h(x) = \mathcal{O}(e^{\omega x}) & \text{et} \quad h'(x) = \mathcal{O}(e^{\omega x}) \quad \text{lorsque } x \to -\infty, \\ h(x) = \mathcal{O}(e^{-\omega x}) & \text{et} \quad h'(x) = \mathcal{O}(e^{-\omega x}) \quad \text{lorsque } x \to +\infty. \end{cases}$$