ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 2014

FILIÈRE BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Cachan, Lyon, Paris et de l'ENPC

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Ce sujet porte sur un modèle de dynamique des populations structurées en âge.

Il comporte quatre parties présentées par ordre croissant de difficulté. Les trois premières parties sont indépendantes. La quatrième partie utilise les résultats des parties précédentes, qui pourront être admis.

Il est recommandé de lire attentivement et patiemment le sujet. Il est demandé de veiller au soin de la présentation, ainsi qu'à la rigueur et à la concision des raisonnements.

Notations

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$, celui des nombres réels positifs $\mathbb{R}^+$.

Pour toute fonction $f : [0, a[\to \mathbb{R}$, avec $a > 0$ ou $a = +\infty$, on note $\int_0^a f(x)dx$ son intégrale sur $[0, a[$, quand celle-ci existe.

Si $\rho : (t, a) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on notera $\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, a)$ (respectivement $\frac{\partial \rho}{\partial a}(t, a)$) sa dérivée partielle par rapport à la variable t (respectivement a), c'est-à-dire la dérivée de la fonction $t \mapsto \rho(t, a)$ (respectivement $a \mapsto \rho(t, a)$).

Première partie : Inversion de la transformation de Laplace

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) Rappeler la loi de la somme $S_n = X_1 + ... + X_n$.

2) Montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geqslant n\epsilon) = 0.$$

3) En déduire que pour tout $\lambda > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant nx} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x < \lambda, \\ 1 & \text{si} & x > \lambda. \end{array} \right.$$

4) Montrer que la fonction $\lambda \mapsto \sum_{0\leqslant k\leqslant nx} \frac{1}{k!}(n\lambda)^k e^{-n\lambda}$ est décroissante pour tout $x > 0$ (la notation $\sum_{0\leqslant k\leqslant nx}$ signifie qu'on somme sur tous les entiers compris entre 0 et nx).

Soit $P : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive, continue et bornée.

5) Expliquer pourquoi pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} y^k e^{-ny} P(y)dy$ est bien convergente.

6) Montrer à l'aide des questions précédentes que pour tout $x > 0$ et $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x+\epsilon}^{+\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant nx} \frac{1}{k!}(ny)^k e^{-ny} P(y)dy = 0.$$

7) Soit $M > 0$ telle que $|P(y)| \leqslant M$ pour tout $y > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$, $\epsilon \in]0, x[$ et $n \geqslant 1$:

$$\Big| \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \sum_{0\leqslant k\leqslant nx} \frac{1}{k!}(ny)^k e^{-ny} P(y)dy \Big| \leqslant 2M\epsilon.$$

8) Démontrer l'inégalité :

$$\Big| \int_0^x P(y)dy - \int_0^{x-\epsilon} \sum_{0\leqslant k\leqslant nx} \frac{1}{k!}(ny)^k e^{-ny} P(y)dy \Big| \leqslant M\epsilon + M(x-\epsilon)\Big(1 - \sum_{0\leqslant k\leqslant nx} \frac{1}{k!} n^k (x-\epsilon)^k e^{-n(x-\epsilon)}\Big).$$

On définit la fonction $\phi(\theta) := \int_0^{+\infty} e^{-\theta y} P(y)dy$, appelée *transformation de Laplace* de P.

9) Vérifier cette intégrale est bien définie pour tout $\theta > 0$.
On admettra que la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et que la dérivée $k-$ième de ϕ est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \theta > 0, \quad \phi^{(k)}(\theta) = \int_0^{+\infty} (-y)^k e^{-\theta y} P(y)dy.$$

10) Conclure à l'aide des questions 6), 7) et 8) que pour tout $x > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant nx} \frac{(-1)^k}{k!} n^k \phi^{(k)}(n) = \int_0^x P(y)dy.$$

11) Conclure que la fonction P est uniquement déterminée par ϕ.

Deuxième partie : un modèle d'équations aux dérivées partielles et sa reformulation intégrale

Soit μ une fonction positive et continue sur $[0, +\infty[$. Soit β une fonction positive, non-nulle, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, telle que $\beta(a) = 0$ pour tout $a \geqslant a_*$, pour un certain $a_* > 0$. Soit p_0 une fonction positive et continue sur $[0, +\infty[$. On s'intéresse dans cette partie à l'équation aux dérivées partielles dite de Mc Kendrick - Von Foerster :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}(t,a) + \dfrac{\partial\rho}{\partial a}(t,a) + \mu(a)\rho(t,a) = 0, & \text{pour tout } (t,a) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[, \\ \rho(t,0) = \int_0^{a_*} \beta(a)\rho(t,a)da, & \text{pour tout } t \in]0,+\infty[, \\ \rho(0,a) = p_0(a), & \text{pour tout } a \in]0,+\infty[. \end{cases} \tag{1}$$

12) On appelle t le temps, a l'âge, $\rho(t,a)$ la densité de population d'âge a au temps t, p_0 la condition initiale, $\beta(a)$ le taux de fécondité à l'âge a, $\mu(a)$ le taux de mortalité à l'âge a. Expliquer ces différents termes.

On admet que l'équation (1) admet une solution ρ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, et on va chercher dans les questions suivantes à en déterminer les propriétés.

13) Montrer que :

$$\forall (t,a) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ \text{tels que } t \geqslant a, \quad \rho(t,a) = \rho(t-a,0)e^{-\int_0^a \mu(a')da'}.$$

On pourra montrer que la fonction $a \mapsto \rho(t+a,a)$, avec $t>0$ fixé, vérifie une équation différentielle que l'on résoudra.

14) De même, étudier $t \mapsto \rho(t,a+t)$, avec a fixé, et en déduire une formulation pour $\rho(t,a)$ pour tout $t \leqslant a$ en fonction de p_0 et μ.

Soit $P(t) := \rho(t,0)$.

15) Montrer que

$$\forall t > 0, \quad P(t) = \psi(t) + \int_0^t \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(a')da'}P(t-a)da, \tag{2}$$

pour une certaine fonction positive, continue, bornée et d'intégrale convergente ψ qu'on exprimera en fonction de p_0, μ et β.

16) Réciproquement, expliquer comment construire une solution ρ de (1) à partir d'une solution $P \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[)$ de (2).

Troisième partie : solutions exponentielles de l'équation

On s'intéresse dans cette partie aux données initiales p_0 donnant une solution ρ de (1) de la forme $\rho(t,a) = R(a)e^{\lambda_0 t}$, avec R une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telle que $R(0)=1$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

17) Montrer qu'une telle solution satisfait

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{da}(a) + \big(\mu(a)+\lambda_0\big)R(a) = 0, \quad \text{pour tout } a \in [0,+\infty[, \\ \int_0^{a_*} \beta(a)R(a)da = 1. \end{cases} \tag{3}$$

18) Exprimer $R(a)$ en fonction de a, μ et λ_0.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $I(\lambda) := \int_0^{a_*} \beta(a)e^{-\lambda a - \int_0^a \mu(a')da'}da$. On admettra que I est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

19) Montrer que λ_0 satisfait $\int_0^{a_*} \beta(a)e^{-\lambda_0 a - \int_0^a \mu(a')da'}da = 1$.

20) En utilisant les propriétés de β et μ, montrer qu'il existe $\delta > 0$, $m > 0$ et a_0, b_0 tels que $0 \leqslant a_0 < b_0 \leqslant a_*$, $\beta(a) > \delta$ pour tout $a \in [a_0,b_0]$ et $\mu(a) \leqslant m$ pour tout $a \in [0,b_0]$. En déduire que $\lim_{\lambda\to-\infty} I(\lambda) = +\infty$.

21) De même, démontrer l'existence d'une constante $M > 0$ telle que $I(\lambda) \leqslant \frac{M}{\lambda}(1-e^{-\lambda a_*})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

22) Montrer qu'il existe un unique $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $I(\lambda_0) = 1$.

23) Prouver que $\lambda_0 < 0$ si et seulement si $\int_0^{a_*} \beta(a)e^{-\int_0^a \mu(a')da'}da < 1$.

24) Conclure qu'il existe une unique donnée initiale p_0 donnant une solution ρ de (1) de la forme $\rho(t,a) = R(a)e^{\lambda_0 t}$, avec R une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telle que $R(0)=1$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

On considère une solution ρ de l'équation (1) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.
On supposera jusqu'à la fin du problème qu'il existe $a_M > 0$ tel que $p_0(a) = 0$ pour tout $a \geqslant a_M$ et que $\beta(a) > 0$ pour tout $a \in (0,a_*)$.

25) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $p_0(a) < CR(a)$ pour tout $a > 0$.

On définit comme avant $P(t) = \rho(t,0)$.

26) Montrer que $P(0) < C$, où C est défini dans la question précédente.

27) Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $P(t_0) = Ce^{\lambda_0 t_0}$.

a) Expliquer pourquoi on peut supposer que $P(t) < Ce^{\lambda_0 t}$ pour tout $t \in [0, t_0[$.

b) Soit $Q(t) := Ce^{\lambda_0 t} - P(t)$. Montrer que Q satisfait :

$$Q(t) \geqslant \int_0^t \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(a')da'} Q(t-a)da.$$

c) En déduire une contradiction.

28) Déduire à l'aide de la question précédente et des questions 13) et 14) que $\rho(t,a) \leqslant CR(a)e^{\lambda_0 t}$ pour tout $t > 0$, $a > 0$.

29) Conclure sur la convergence de $\rho(t,a)$ quand $t \to +\infty$ dans le cas où $\int_0^{a_*} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(a')da'} da < 1$. Comment interpréter ce résultat en termes de dynamiques des populations ?

Quatrième partie : convergence quand $t \to +\infty$

On revient dans cette partie à l'étude de l'équation intégrale (2) introduite dans la Deuxième partie. On considère une solution ρ de l'équation (1) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$. On lui associe $P(t) = \rho(t,0)$ solution de (2).

On supposera dans toute cette partie que $\int_0^{a_*} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(a')da'} da = 1$**.**

30) Montrer à l'aide de la question 28) que P est bornée.

La fonction P étant bornée et continue, on peut définir pour tout $\theta > 0$ comme dans la Première partie $\phi(\theta) := \int_0^{+\infty} P(t) e^{-\theta t} dt$ et, comme dans la Troisième partie, $I(\theta) = \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a \mu(a')da'} e^{-\theta a} da$ pour tout $\theta \geqslant 0$. Enfin, soit $J(\theta) := \int_0^{+\infty} \psi(a) e^{-\theta a} da$ pour tout $\theta \geqslant 0$, où ψ a été définie par (2). On admet, comme dans la Première Partie, que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$I'(0) = -\int_0^{+\infty} a\beta(a) e^{-\int_0^a \mu(a')da'} da.$$

31) Montrer à l'aide de l'équation (2) que

$$\forall \theta > 0, \quad \phi(\theta) = J(\theta) + I(\theta)\phi(\theta).$$

32) Montrer que $I(0) = 1$ et que $I(\theta) < 1$ pour tout $\theta > 0$.

33) Déduire de la question 11) que la fonction P est entièrement déterminée par p_0, μ et β.

34) Conclure à l'aide du lien identifié dans la Deuxième partie entre les équations (1) et (2) que si l'on se donne p_0, μ et β, alors l'équation (1) admet au plus une solution.

35) Calculer $\lim_{\theta \to 0^+} \dfrac{1 - I(\theta)}{\theta}$ en fonction de μ et β.

36) Montrer que $\ell := \lim_{\theta \to 0^+} \theta\phi(\theta)$ est bien définie et calculer cette limite en fonction de p_0, μ et β.

On suppose que $t \mapsto P(t)$ **converge quand** $t \to +\infty$ **et on admettra que** $\lim_{t \to +\infty} P(t) = \ell$**.**

37) Montrer à l'aide de la question 13) que la fonction $t \mapsto \rho(t,a)$ converge quand $t \to +\infty$ pour tout $a > 0$ et calculer sa limite.

⋆ ⋆
⋆