SESSION 2000

Filière BCPST

MATHÉMATIQUES

•

(Épreuve commune aux ENS : Ulm, Lyon et Cachan)

DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

PRELIMINAIRE

La notion de conflit entre organismes est fondamentale en biologie de l'évolution : concurrence pour l'accès aux ressources au sein d'une même espèce, conflit entre une espèce prédatrice et ses proies, ou entre une espèce hôte et ses parasites. La théorie des jeux, issue de l'économie, permet de modéliser les effets d'un conflit sur la valeur sélective de chaque phénotype en présence. L'idée générale est que, dans son interaction conflictuelle avec un *adversaire*, un *joueur* donné adopte une certaine *stratégie* ; le bilan de l'interaction se solde par un *payoff*, c'est à dire un gain ou une perte qui dépend de la stratégie du joueur et de celle adoptée par l'adversaire. Dans le contexte biologique, un *coup* du jeu représente l'interaction, la stratégie est vue comme un trait phénotypique, le *payoff* est répercuté sur le succès reproducteur, et la sélection naturelle remplace la rationalité des joueurs. L'étude proposée dans ce problème est motivée par la question de la diversification, au cours de l'évolution, des stratégies d'attaque et de résistance d'une espèce parasite et de son espèce hôte.

Dans tout le problème on considère un **jeu à somme nulle** opposant deux adversaires, c'est à dire qu'à chaque coup le payoff gagné (ou perdu) par un joueur est exactement égal à l'opposé du payoff perdu (ou gagné) par son adversaire.

On note R l'ensemble des nombres réels ; N^*, l'ensemble des nombres entiers strictement positifs ; $M_{m,n}(\mathrm{R})$, l'ensemble des matrices à coefficients réels comportant m lignes et n colonnes. On suppose que les joueurs (1) et (2) disposent de m et n stratégies respectivement. Pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$ et tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, on note a_{ij} le payoff du joueur (1) contre le joueur (2) si (1) choisit la stratégie i et (2) choisit la stratégie j. On note $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ la 'matrice du jeu' dont les coefficients sont les réels a_{ij}. Dans un jeu à somme nulle, le joueur (1) cherche une stratégie qui maximise son payoff, tandis que le joueur (2) cherche une stratégie qui minimise son propre payoff.

On peut traiter les Parties I à IV indépendamment les unes des autres à condition d'avoir pris connaissance des notions introduites dans la ou les Parties précédentes (indiquées en caractères gras). La Partie V vise à établir des résultats techniques sur la distribution de sommes de variables aléatoires indépendantes. Elle peut être résolue de manière complètement indépendante des Parties I-IV. Cependant, on évitera d'aborder les questions V.4 et V.5, plus difficiles, au détriment de la résolution du reste du problème.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent sont réelles. $E(X)$ désigne l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X. $P(U)$ désigne la probabilité d'un événement U. On utilise la notation ${}^t\bullet$ pour indiquer la transposition du vecteur ou de la matrice $\bullet$.

PARTIE I

Stratégies optimales, point-selle.

I.1. Montrer que le joueur (1) peut choisir une stratégie qui lui garantisse un gain au moins égal à $\max\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}$, et que le joueur (2) peut choisir une stratégie qui lui garantisse une perte au plus égale à $\min\limits_{1\le j\le n}\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$.

I.2. Montrer : $\max\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij} \le \min\limits_{1\le j\le n}\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$.

I.3. Lorsqu'il y a égalité, $\max\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij} = \min\limits_{1\le j\le n}\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$, on note v la valeur commune à ces deux termes. Montrer qu'il existe alors deux entiers $i^*\in\{1,\ldots,m\}$ et $j^*\in\{1,\ldots,n\}$ tels que $v = a_{i^*j^*}$, et pour tout $i\in\{1,\ldots,m\}$ et tout $j\in\{1,\ldots,n\}$, $a_{ij^*}\le v\le a_{i^*j}$.

I.4. Réciproquement, montrer que s'il existe un couple $(i^*,j^*)\in\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}$ tel que pour tout $i\in\{1,\ldots,m\}$ et tout $j\in\{1,\ldots,n\}$ on a $a_{ij^*}\le a_{i^*j^*}\le a_{i^*j}$, alors on est dans le cas d'égalité $\max\limits_{1\le i\le m}\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij} = \min\limits_{1\le j\le n}\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$, et cette valeur est égale à $a_{i^*j^*}$.

Dans ce cas, on dit alors que i^* et j^* sont les **stratégies optimales** des joueurs (1) et (2) respectivement, et que le couple (i^*,j^*) est un **point-selle** du jeu.

I.5. Montrer que si (i^*,j^*) et (k^*,l^*) sont deux points-selle du jeu, alors $a_{i^*j^*} = a_{k^*l^*}$.

I.6. « Caillou-papier-ciseaux » est un célèbre jeu enfantin. Deux joueurs disposent chacun des trois stratégies « caillou », « papier » et « ciseaux ». A chaque coup du jeu, les joueurs annoncent simultanément leur choix, « caillou », ou « papier », ou « ciseaux ». En cas d'annonces identiques, le coup compte zéro pour les deux joueurs ; sinon, « ciseaux » bat « papier », qui bat « caillou », qui bat « ciseaux », et le gagnant rafle une unité au perdant. Ecrire la matrice du jeu. Ce jeu possède-t-il un point-selle ?

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

Stratégies mixtes, théorème du minimax.

Soit p un entier ≥ 2. On désigne par Σ_p l'ensemble des vecteurs de R^p dont les coordonnées sont positives ou nulles et ont une somme égale à 1. Un élément $\mathbf{x}$ de Σ_m est appelé « **stratégie mixte** » pour le joueur (1) ; et on appelle un élément $\mathbf{y}$ de Σ_n, une stratégie mixte pour le joueur (2). L'interprétation de la notion de stratégie mixte $\mathbf{x}={}^t(x_1,\ldots,x_m)$ (respectivement $\mathbf{y}={}^t(y_1,\ldots,y_n)$) est que le joueur (1) [resp. (2)] joue chacune des stratégies $i\in\{1,\ldots,m\}$ avec probabilité x_i (resp. $j\in\{1,\ldots,n\}$ avec probabilité y_j).

II.1. Montrer que le joueur (1) peut choisir une stratégie mixte qui lui garantisse un gain au moins égal à $\max\limits_{\mathbf{x}\in\Sigma_m}\min\limits_{\mathbf{y}\in\Sigma_n}{}^t\mathbf{xAy}$, et que le joueur (2) peut choisir une stratégie mixte qui lui garantisse une perte au plus égale à $\min\limits_{\mathbf{y}\in\Sigma_n}\max\limits_{\mathbf{x}\in\Sigma_m}{}^t\mathbf{xAy}$.

II.2. Montrer : $\max\limits_{\mathbf{x}\in\Sigma_m}\min\limits_{\mathbf{y}\in\Sigma_n}{}^t\mathbf{xAy}\leq\min\limits_{\mathbf{y}\in\Sigma_n}\max\limits_{\mathbf{x}\in\Sigma_m}{}^t\mathbf{xAy}$.

Dans la suite de cette partie on fixe $m=3$ (tous les résultats établis en dimension 3 pourraient se généraliser en dimension supérieure). Soit $\mathbf{O}$ un point de l'espace affine R^3 définissant l'origine d'un repère orthonormé. Pour tout point $\mathbf{a}\in\mathrm{R}^3$ on note $\mathbf{Oa}$ le vecteur d'extrémités $\mathbf{O}$ et $\mathbf{a}$. Sur l'espace affine R^3 on définit la distance euclidienne de deux points quelconques $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, notée $d(\mathbf{a},\mathbf{b})$, en posant : $d(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$, où les réels a_1,a_2,a_3 et b_1,b_2,b_3 sont les coordonnées de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Etant donnés n points $\mathbf{a}^{(1)}=(a_{11},a_{21},a_{31})$, $\mathbf{a}^{(2)}=(a_{12},a_{22},a_{32}),\ldots,$ $\mathbf{a}^{(n)}=(a_{1n},a_{2n},a_{3n})$ fixés, on définit l'**enveloppe convexe** C de ces n points $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$,..., $\mathbf{a}^{(n)}$ comme étant l'ensemble des points $\mathbf{a}\in\mathrm{R}^3$ pour lesquels il existe n réels $t_1,\ldots,t_n$ (qui dépendent de $\mathbf{a}$) tous positifs ou nuls, de somme égale à 1, et tels que

$$\mathbf{Oa}=t_1\mathbf{Oa}^{(1)}+t_2\mathbf{Oa}^{(2)}+\ldots+t_n\mathbf{Oa}^{(n)}.$$

II.3. Montrer que, en effet, l'ensemble C est convexe, c'est à dire que quels que soient $\mathbf{a}\in C$, $\mathbf{b}\in C$ et $\lambda\in[0,1]$, le point $\mathbf{c}$ défini par $\mathbf{Oc}=\lambda\,\mathbf{Oa}+(1-\lambda)\mathbf{Ob}$ appartient à C.

II.4. On suppose que $\mathbf{O}$ n'appartient pas à C. On admet qu'il existe alors $\mathbf{s}=(s_1,s_2,s_3)\in C$ tel que $d(\mathbf{O},\mathbf{s})=\inf\limits_{\mathbf{a}\in C}d(\mathbf{O},\mathbf{a})$, ce qui signifie que $\mathbf{s}$ réalise la distance de $\mathbf{O}$ à C. Montrer que pour tout $\mathbf{a}\in C$ de coordonnées a_1,a_2,a_3, on a :

$$s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3 > 0.$$

On pourra pour cela écrire que le point $\mathbf{c}$ défini par $\mathbf{Oc} = \lambda\,\mathbf{Oa} + (1-\lambda)\mathbf{Ob}$ appartient à C quel que soit $\lambda \in [0,1]$, et utiliser la définition de $\mathbf{s}$.

II.5. On définit les points $\mathbf{e}^{(1)} = (1,0,0)$, $\mathbf{e}^{(2)} = (0,1,0)$, $\mathbf{e}^{(3)} = (0,0,1)$, et on considère ici l'enveloppe convexe C' des $n+3$ points $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$,..., $\mathbf{a}^{(n)}$, $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}^{(3)}$. Montrer les deux propositions suivantes

(i) si $\mathbf{O} \notin C'$, alors il existe $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \Sigma_3$ tel que pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$,

$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + a_{3j}x_3 > 0$;

(ii) si $\mathbf{O} \in C'$, alors il existe $\mathbf{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \Sigma_n$ tel que pour tout $i \in \{1,2,3\}$,

$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n \le 0$.

II.6. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer qu'on a :

$$\min_{\mathbf{y}\in\Sigma_n} \max_{\mathbf{x}\in\Sigma_m} {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y} \le 0,$$

ou (exclusif)

$$\max_{\mathbf{x}\in\Sigma_m} \min_{\mathbf{y}\in\Sigma_n} {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y} > 0.$$

En déduire : $\max\limits_{\mathbf{x}\in\Sigma_m} \min\limits_{\mathbf{y}\in\Sigma_n} {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y} = \min\limits_{\mathbf{y}\in\Sigma_n} \max\limits_{\mathbf{x}\in\Sigma_m} {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{y}$.

La quantité définie à la question II.6 est appelée **valeur** du jeu défini par la matrice $\mathbf{A}$.

PARTIE III

Probabilité de l'existence d'un point-selle.

On suppose dans cette Partie III que les coefficients de la matrice de jeu $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées. On note $F : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ leur fonction de répartition commune. On définit les évènements suivants :

U : « $\mathbf{A}$ possède un point-selle »,

$U(i,j)$: « (i,j) est un point-selle de $\mathbf{A}$ »,

V : « tous les coefficients de $\mathbf{A}$ sont distincts ».

Tournez la page S.V.P.

III.1. On suppose que la fonction F est continue. Montrer : $P(U) = P(U \cap V)$.

III.2. En utilisant le résultat de la question I.5, montrer : $P(U) = m \cdot n \cdot P(U(1,1) \cap V)$.

III.3. En déduire : $P(U) = \dfrac{m!\,n!}{(m+n-1)!}$. Comment varie $P(U)$ quand m ou n augmente ?

III.4. Soit $\mathbf{A} \in M_{2,2}(\mathrm{R})$ dont les coefficients sont tirés selon la même loi de Bernoulli : $P(A_{ij} = 0) = q$, $P(A_{ij} = 1) = 1 - q$, où $q \in \left]0,1\right[$. Calculer la probabilité de l'existence d'un point-selle pour une telle matrice $\mathbf{A}$. Commenter le résultat en le comparant à $P(U)$ calculé à la question précédente.

PARTIE IV

Comportement asymptotique de la valeur d'un jeu aléatoire lorsque le nombre de stratégies augmente

On considère une suite double (A_{ij}), $i \in \mathrm{N}^*$, $j \in \mathrm{N}^*$, de variables aléatoires réelles. On définit la matrice de jeu $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ dont les coefficients sont les A_{ij} avec $1 \le i \le m$ et $1 \le j \le n$. On note $V_{mn}(\mathbf{A})$, ou plus simplement V_{mn}, la variable aléatoire égale à la valeur du jeu défini par $\mathbf{A}$ (la notion de valeur d'un jeu a été introduite à la question II.6).

IV. 1. Soit ξ un réel quelconque. Montrer les inégalités :

$$P[V_{mn}(A) \ge \xi] \le \sum_{i=1}^{m} P\left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \ge \xi\right),$$

$$P[V_{mn}(A) \le \xi] \le \sum_{j=1}^{n} P\left(m^{-1} \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \le \xi\right).$$

On suppose désormais que les variables aléatoires A_{ij} sont indépendantes et distribuées identiquement à une variable aléatoire X. On suppose que X admet une densité.

On considère deux suites d'entiers notées $(m_k)_{k \in \mathrm{N}^*}$ et $(n_k)_{k \in \mathrm{N}^*}$ strictement croissantes. On pose $V_k(\mathbf{A}) = V_{m_k n_k}(\mathbf{A})$.

IV. 2. On suppose qu'il existe un réel $H > 0$ tel que $E[\exp(tX)]$ soit finie pour tout $t \in \left]-H, H\right[$. On suppose de plus que $\lim_{k \to +\infty} (\ln m_k)/n_k = 0$ et $\lim_{k \to +\infty} m_k / (\ln n_k) = \infty$. En majorant

$P\left[\left|V_{mn}(\mathbf{A})\right| \geq \varepsilon\right]$ à l'aide des inégalités de la question IV.1, et en utilisant les Théorèmes 1 et 2 (*cf.* Partie V), montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\lim\limits_{k\to\infty} P\left[\left|V_k(\mathbf{A})\right| \geq \varepsilon\right] = 0$.

IV. 3. On suppose qu'il existe un réel $r \geq 2$ tel que $E\left(|X|^r\right)$ soit finie. On suppose de plus que $m_k = O\left({n_k}^{r-1}\right)$ et $n_k = O\left({m_k}^{r-1}\right)$. En majorant comme à la question précédente $P\left[\left|V_{mn}(\mathbf{A})\right| \geq \varepsilon\right]$ à l'aide des inégalités de la question IV.1, et en utilisant les Théorèmes 3 et 4 (*cf.* Partie V), montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\lim\limits_{k\to\infty} P\left[\left|V_k(\mathbf{A})\right| \geq \varepsilon\right] = 0$.

PARTIE V

Théorèmes auxiliaires.

V. 1. Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une densité f. Montrer l'équivalence des trois propriétés :

(i) Il existe un réel $H > 0$ tel que $E[\exp(tX)]$ soit finie pour tout $t \in \left]-H, H\right[$.

(ii) Il existe un réel $a > 0$ tel que $E[\exp(a|X|)]$ soit finie.

(iii) Il existe des réels $b > 0$ et $c > 0$ tels que pour tout réel $x > 0$, $P\left(|X| \geq x\right) \leq b\exp(-cx)$.

Montrer de plus que si $E(X) = 0$, alors (i), (ii) et (iii) sont aussi équivalentes à l'assertion :

(iv) Il existe des réels $g > 0$ et $T > 0$ tels que $E[\exp(tX)] \leq \exp\left(g\,t^2\right)$ pour tout $t \in [-T, T]$.

L'ensemble de ces équivalences constitue le ***Théorème*** **1** *invoqué dans la Partie* IV.

V. 2. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et on pose $S = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

On suppose qu'il existe des réels strictement positifs $g_1, \ldots, g_n$ et T tels que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $t \in [0, T]$ on a : $E[\exp(tX_k)] \leq \exp\left(\frac{g_k}{2} t^2\right)$. On pose $G = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$. Montrer :

$$P(S \geq x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2G}\right) \text{ si } 0 \leq x \leq GT$$

Tournez la page S.V.P.

$$P(S \geq x) \leq \exp\left(-\frac{Tx}{2}\right) \text{ si } x \geq GT.$$

Pour cela, on pourra considérer la variable aléatoire positive $\exp(tS)$ et majorer $P(S \geq x)$ à l'aide de $E[\exp(tS)]$.

Ce résultat constitue le ***Théorème 2*** *invoqué dans la Partie* IV.

V. 3. On se propose dans cette question et la suivante d'établir *le résultat qui constitue le* ***Théorème 3*** *invoqué dans la Partie* IV :

Soit (X_n), $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées. On définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On suppose qu'il existe un réel $t > 0$ tel que $P(|X_1| \geq n) = o(n^{-t-1})$; on suppose de plus que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} P(n^{-1}|S_n| \geq \varepsilon) = 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $P(n^{-1}|S_n| \geq \varepsilon) = o(n^{-t})$.

V. 3. 1. Soit Y une variable aléatoire. On définit une variable aléatoire $\widetilde{Y}$, dite 'symétrisée' de Y, en posant $\widetilde{Y} = Y - Z$ où Z et Y sont indépendantes et identiquement distribuées. Par ailleurs, on appelle **médiane** de Y tout réel, noté $\mu(Y)$, tel que $P(Y \geq \mu(Y)) \geq 1/2$ et $P(Y \leq \mu(Y)) \geq 1/2$. Soit ζ un réel strictement positif. En considérant les évènements $U = \{Y - \mu(Y) \geq \zeta\}$, $V = \{Z - \mu(Z) \leq 0\}$ et $W = \{\widetilde{Y} \geq \zeta\}$, et en prenant $\mu(Y) = \mu(Z)$, montrer :

$$\frac{1}{2} P(|Y - \mu(Y)| \geq \zeta) \leq P(|\widetilde{Y}| \geq \zeta).$$

Montrer aussi que pour tout réel a, on a :

$$P(|\widetilde{Y}| \geq \zeta) \leq 2P\left(|Y - a| \geq \frac{\zeta}{2}\right).$$

On se place sous les hypothèses du Théorème 3. On définit la suite de variables aléatoires symétrisées $(\widetilde{X}_n)$ à partir de la suite (X_n) en écrivant $\widetilde{X}_n = X_n - Y_n$ où X_n et la variable aléatoire Y_n sont identiquement distribuées, et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ sont indépendantes. On pose $\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{X}_k$. On note μ_n une médiane de la variable aléatoire $n^{-1}S_n$.

V. 3. 2. Montrer : $P\left(\left|\widetilde{X}_1\right| \geq n\right) = o\left(n^{-t-1}\right)$.

V. 3. 3. Soit ε un réel strictement positif. Montrer que si $P\left(n^{-1}\left|\widetilde{S}_n\right| \geq \varepsilon\right) = o\left(n^{-t}\right)$, alors :

$$P\left(\left|n^{-1}S_n - \mu_n\left(n^{-1}S_n\right)\right| \geq \varepsilon\right) = o\left(n^{-t}\right).$$

V. 3. 4. Montrer : $\lim_{n\to\infty} \mu_n\left(n^{-1}S_n\right) = 0$.

V. 3. 5. Achever alors la preuve du Théorème 3.

La question V.4 est donc destinée à prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(n^{-1}\left|\widetilde{S}_n\right| \geq \varepsilon\right) = o\left(n^{-t}\right)$.

V. 4. 1. Pour tout $n \in \mathrm{N}^*$ et tout entier $k \in \{1,\ldots,n\}$, on pose $\widetilde{X}_{nk} = \widetilde{X}_k$ si $\left|\widetilde{X}_k\right| < n$, $\widetilde{X}_{nk} = 0$ si $\left|\widetilde{X}_k\right| \geq n$. On définit alors $\widetilde{S}_{nn} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{X}_{nk}$. Soit ε un réel strictement positif. Ecrire une majoration de $n^t P\left(n^{-1}\left|\widetilde{S}_n\right| \geq \varepsilon\right)$ en fonction de $n^{t+1}P\left(\left|\widetilde{X}_1\right| \geq n\right)$, et $n^t P\left(n^{-1}\left|\widetilde{S}_{nn}\right| \geq \varepsilon\right)$.

Soit h un entier pair, $h > 2t+1$. Dans la suite de cette question V.4, on fixe k entiers strictement positifs $h_1, h_2, \ldots, h_k$ tels que $h = 2h_1 + 2h_2 + \ldots + 2h_k$.

V. 4. 2. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathrm{N}^*$:

$$n^t P\left(n^{-1}\left|\widetilde{S}_{nn}\right| \geq \varepsilon\right) \leq K n^{t-h+k} E\left(\widetilde{X}_{n1}^{\;2h_1}\right) \ldots E\left(\widetilde{X}_{n1}^{\;2h_k}\right).$$

V. 4. 3. Pour $i \in \{1,\ldots,k\}$, on pose $E_{h_i} = E\left(\left|\widetilde{X}_{n1}\right|^{2h_i}\right)$. En procédant à une intégration par parties, et en utilisant le résultat de la question V.3.2, montrer que $E_{h_i} = O(1)$ si $2h_i < t+1$, $E_{h_i} = o(\ln n)$ si $2h_i = t+1$, et $E_{h_i} = o\left(n^{2h_i - t - 1}\right)$ si $2h_i > t+1$.

V. 4. 4. Soient α, β, γ les nombres d'entiers h_i, $i \in \{1,\ldots,k\}$, respectivement plus petits que, égaux à, et plus grands que $(t+1)/2$. On pose aussi $\lambda = \sum_{h_i < (t+1)/2} (2h_i - 1)$. Montrer que dans l'inégalité V.4.2, le membre de droite est $o\left(n^{t-(\beta+\gamma)t-\lambda}(\ln n)^{\beta}\right)$, et que cette quantité est elle-même $o(1)$. Conclure.

Tournez la page S.V.P.

V. 5. Soit (X_n), $n \in \mathrm{N}^*$, une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées. On définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On suppose que $E(X_1) = 0$ et qu'il existe un réel $r \geq 1$ tel que $E(|X|^r)$ soit finie. Montrer qu'on a : $P(|X_1| \geq n) = o(n^{-r})$, et que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P(n^{-1}|S_n| \geq \varepsilon) = 0$.

Ce résultat constitue le ***Théorème 4*** *invoqué dans la Partie* IV.