UC 113 J. 5107

SESSION 2001

Filière MP

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS : Ulm et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Préambule

On assimile les éléments de $\mathbb{R}^n$ à des vecteurs colonnes

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle x\,,\,y\rangle$ le produit scalaire euclidien entre x et y:

$$\langle x\,,\,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^txy$$

et $||x||$ la norme euclidienne associée.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques réelles $n \times n$, muni de la norme

$$||H|| = \max\{||H.x|| : x \in \mathbb{R}^n \text{ et } ||x|| = 1\}$$

On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'une norme.

Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ telle que:

- $\forall x, y \in E : d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in E : d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x, y, z \in E : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Si F est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\nabla F(x)$ le gradient de F, vecteur colonne dont la ième coordonnée est la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ évaluée en x.

On dit qu'un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si pour tous $a, b \in \Omega$, il existe une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = a$, $f(1) = b$ et pour tout $t \in [0,1]$: $f(t) \in \Omega$.

Les différentes parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres, en admettant au besoin les résultats de la partie II pour les parties III et IV.

Partie I

Dans cette partie, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction strictement positive, de classe C^1 définie sur I. Pour tous points a et b dans I, on note $\mathcal{G}_{a,b}$ l'ensemble des fonctions f, de classe C^1 définies sur $[0,1]$, à valeurs dans I, telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Pour toute fonction f de classe C^1 définie sur $[0,1]$, à valeurs dans I, on note

$$E_1(f) = \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

et

$$E_\rho(f) = \int_0^1 f'(t)^2 \rho(f(t)) dt$$

1) Montrer que pour toute fonction q continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\int_0^1 q(t)^2 dt \geq \left(\int_0^1 q(t) dt \right)^2$$

et discuter des cas d'égalité.

2) En déduire l'existence et la valeur de

$$\min\{ \sqrt{E_1(g)} : g \in \mathcal{G}_{a,b} \}$$

et montrer que la fonction f réalisant ce minimum est unique.

3) Montrer qu'il existe ψ de classe C^2, strictement croissante, définie sur I, à valeurs réelles, telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{G}_{a,b}$:

$$E_\rho(f) = \int_0^1 \left[(\psi \circ f)'(t)\right]^2 dt$$

4) On suppose fixée une telle fonction ψ. Montrer que, pour tous a, b dans I:

$$\min\left\{\sqrt{E_\rho(f)} : f \in \mathcal{G}_{a,b}\right\} = |\psi(a) - \psi(b)|$$

Montrer que ce minimum est atteint en une unique fonction $f_{a,b}$ que l'on calculera.

5) Montrer que $f_{a,b}$ est de classe C^2 et solution sur $[0,1]$ de l'équation différentielle

$$2y''\rho(y) + (y')^2\rho'(y) = 0$$

Partie II

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$h(t) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{t^2}{1-t^2}\right], & \text{si } t \in]-1,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On notera $C_h = \int_{-1}^1 h(t)dt$

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $h_{t_0,\varepsilon}$ par

$$h_{t_0,\varepsilon}(t) = \frac{1}{C_h\varepsilon} h\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right)$$

On admettra que h est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1) Soit n un entier strictement positif. Montrer que si f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$, alors, pour $t_0 \in]0,1[$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

$$\int_0^1 h_{t_0,\varepsilon}(t) f(t) dt = \frac{1}{C_h}\int_{-1}^1 h(t) f(\varepsilon t + t_0) dt$$

et en déduire la limite, lorsque ε tend vers 0, de

$$\int_0^1 h_{t_0,\varepsilon}(t) f(t) dt$$

2) Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des applications ϕ de classe C^1 sur $[0,1]$, à valeurs réelles, telles que $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Montrer que si f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{T}$

$$\int_0^1 \phi(t) f(t) dt = 0$$

alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

3) Si t_0 et t_1 sont deux éléments de $]0,1[$, montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une fonction $\phi \in \mathcal{T}$ telle que

$$\phi'(t) = h_{t_1,\varepsilon}(t) - h_{t_0,\varepsilon}(t)$$

4) En déduire que si f est une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{T}$:

$$\int_0^1 \phi'(t) f(t) dt = 0$$

alors f est constante sur $[0,1]$.

5) a) Montrer que si f et g sont deux fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que, pour tout $\phi \in \mathcal{T}$:

$$\int_0^1 \phi'(t) f(t) dt + \int_0^1 \phi(t) g(t) dt = 0$$

alors f est de classe C^1 et, pour tout $t \in [0,1]$:

$$f'(t) = g(t)$$

b) Montrer que si f et g sont deux fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que, pour toute fonction ψ, de classe C^1 sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $\psi(0) = \psi(1) = 0$, on ait

$$\int_0^1 \langle f(t)\,,\, \psi'(t)\rangle dt + \int_0^1 \langle g(t)\,,\, \psi(t)\rangle dt = 0$$

la même conclusion est vraie: f est de classe C^1 et, pour tout $t \in [0,1]$:

$$f'(t) = g(t)$$

6) Soit δ un réel strictement positif, et f_* une fonction continue de $[-\delta, 1+\delta]$ dans $\mathbb{R}^n$. On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$g_\varepsilon(t_0) = \int_{-\delta}^{1+\delta} h_{t_0,\varepsilon}(t) f_*(t) dt$$

a) Montrer que g_ε est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on peut choisir ε tel que

$$\max\{\|g_\varepsilon(t) - f_*(t)\| : t \in [0,1]\} \leq \alpha\,.$$

c) Montrer que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$ et pour tout $\alpha > 0$ il existe une fonction g de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que

$$\max\{\|g(t) - f(t)\| : t \in [0,1]\} \leq \alpha$$

d) Montrer que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$ et pour tout $\alpha > 0$ il existe une fonction g de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $g(0) = f(0)$, $g(1) = f(1)$ et

$$\max\{||g(t) - f(t)|| : t \in [0,1]\} \leq \alpha$$

Partie III

Soit $n \geq 1$, Ω un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ et ρ une fonction réelle strictement positive, de classe C^1 définie sur Ω. Pour tous points a et b dans I, $\mathcal{F}_{a,b}$ désigne l'ensemble des fonctions f, de classe C^1 définies sur $[0,1]$, à valeurs dans Ω, telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Pour toute fonction f de classe C^1 définie sur $[0,1]$, à valeurs dans Ω, on note

$$E_\rho(f) = \int_0^1 ||f'(t)||^2 \rho(f(t)) dt$$

1) a) Pour tout $x \in \Omega$, on pose

$$\delta(x) = \inf\{||x - y||, y \notin \Omega\}$$

Montrer que δ est strictement positive et continue sur Ω.

b) Montrer que pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans Ω, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$, la boule fermée de centre $f(t)$ et de rayon α est incluse dans Ω.

c) Montrer, en utilisant la question II-6, que $\mathcal{F}_{a,b}$ est non-vide, quels que soient a et b dans Ω.

d) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_{a,b}$ et pour toute fonction ϕ de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\phi(0) = \phi(1) = 0$, il existe $\beta_0 > 0$ tel que, pour tout $\beta \in [-\beta_0, \beta_0]$:

$$f + \beta\phi \in \mathcal{F}_{a,b}$$

2) f, ϕ et β_0 étant comme en III-1-d), on définit, pour $\beta \in [-\beta_0, \beta_0]$:

$$\Psi(\beta) = E_\rho(f + \beta\phi)$$

Montrer que Ψ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

3) On suppose maintenant qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}_{a,b}$ telle que

$$E_\rho(f) = \min\{E_\rho(g) : g \in \mathcal{F}_{a,b}\}$$

a) Montrer que, pour toute fonction ϕ de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\phi(0) = \phi(1) = 0$, on a

$$2\int_0^1 \langle f'(t)\,,\, \phi'(t)\rangle \rho(f(t)) dt + \int_0^1 ||f'(t)||^2 \langle \phi(t)\,,\, \nabla\rho(f(t))\rangle dt = 0$$

b) En déduire que f est de classe C^2 sur $[0,1]$, et solution de l'équation différentielle

$$-2\rho(f)f'' - 2\langle\nabla\rho(f)\,,\,f'\rangle f' + \|f'\|^2\nabla\rho(f) = 0$$

c) Montrer que la fonction $t \mapsto \|f'(t)\|^2\rho(f(t))$ est constante sur $[0,1]$

Partie IV

Dans toute cette partie, on fixe une distance d sur $\mathbb{R}^n$, *et on suppose* $n \geq 2$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note F_x la fonction, définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$F_x(y) = d(x,y)^2$$

1) a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: et pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$|d(x, y+tz) - d(x,y)| \leq d(y, y+tz)$$

b) Montrer que $(x,y) \mapsto d(x,y)$ ne peut pas être une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

On supposera, dans toute la suite de cette partie que la fonction $(x,y) \mapsto d(x,y)^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2) Montrer que $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \Delta$ où

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\}$$

3) a) Montrer qu'il existe une fonction continue

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{S}_n \\ & y & \mapsto & H(y) = (H_{ij}(y), 1 \leq i,j \leq n) \end{array}$$

telle que

$$F_y(y+z) = {}^tzH(y)z + \|z\|^2R(y,z)$$

avec pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{z\to 0} R(y,z) = 0$.

b) Montrer que pour tout y, $H(y)$ est une matrice positive.

4) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} d(f(t), f(t+\delta)) = \sqrt{{}^tf'(t)H(f(t))f'(t)}$$

b) Montrer que pour t tel que $f(t) \neq x$, on a

$$\left|\frac{d}{dt}d(x, f(t))\right| \leq \sqrt{{}^tf'(t)H(f(t))f'(t)}$$

c) Soit $y \neq x$. Montrer que si f est telle que $f(0) = x$, $f(1) = y$ et $f(t) \neq x$ pour tout $t > 0$, alors

$$d(x,y) \leq \int_0^1 \sqrt{{}^t f'(t) H(f(t)) f'(t)}\, dt$$

5) On suppose encore $y \neq x$, et on prend f de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(0) = x$, $f(1) = y$. Soit

$$t_0 = \sup\{t \leq 1 : f(t) = x\}$$

a) Montrer que $t_0 < 1$.

b) Soit $g : [0,1] \to I\!R^n$ définie par $g(t) = f(t_0 + t(1 - t_0))$. Montrer que

$$\int_0^1 \sqrt{{}^t g'(t) H(g(t)) g'(t)}\, dt \leq \int_0^1 \sqrt{{}^t f'(t) H(f(t)) f'(t)}\, dt$$

6) Déduire des résultats précédents que, pour tout x et y dans $I\!R^n$:

$$d(x,y) \leq \inf\left\{\int_0^1 \sqrt{{}^t f'(t) H(f(t)) f'(t)}\, dt : f \text{ de classe } C^1, f(0) = x, f(1) = y\right\}$$

7) a) Montrer que pour tout $x \in I\!R^n$, pour toute fonction f de classe C^1 de $[0,1]$ dans $I\!R^n$, pour tout $t \in [0,1]$

$$\langle \nabla F_x(f(t)),\, f'(t)\rangle^2 \leq 4d(x, f(t))^2 \; {}^t f'(t) H(f(t)) f'(t)$$

b) Montrer que, pour tous $x, y \in I\!R^n$, la matrice $4d(x,y)^2 H(y) - \nabla F_x(y)\, {}^t\nabla F_x(y)$ est positive.

8) Soit x, y dans $I\!R^n$, tels qu'il existe une fonction f de classe C^1 telle que $f(0) = x$, $f(1) = y$, $f(t) \neq x$ pour $t > 0$ et

$$d(x,y) = \int_0^1 \sqrt{{}^t f'(t) H(f(t)) f'(t)}\, dt$$

a) Montrer que pour tout $t_0 \in]0,1]$

$$d(x, f(t_0)) = \int_0^{t_0} \sqrt{{}^t f'(t) H(f(t)) f'(t)}\, dt$$

b) Montrer que pour tout $t_0 \in]0,1]$

$$\langle \nabla F_x(f(t_0)),\, f'(t_0)\rangle^2 = 4d(x, f(t_0))^2 \; {}^t f'(t_0) H(f(t_0)) f'(t_0)$$

9) Soit S une matrice $n \times n$ symétrique réelle définie positive, et $u \in I\!R^n$.

a) Montrer que $S - u\,{}^t u$ est une matrice positive si et seulement si ${}^t u S^{-1} u \leq 1$

b) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes:
(A) Il existe $x \neq 0$ tel que ${}^t xSx = ({}^t xu)^2$
(B) ${}^t uS^{-1}u \geq 1$

10) On suppose que $H(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et que pour tous x, y distincts dans $\mathbb{R}^n$, il existe une fonction f de classe C^1 telle que $f(0) = x$, $f(1) = y$, $f(t) \neq x$ pour $t > 0$ et

$$d(x,y) = \int_0^1 \sqrt{{}^t f'(t) H(f(t)) f'(t)}\,dt$$

Montrer qu'alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq x$

$${}^t \nabla F_x(y) H(y)^{-1} \nabla F_x(y) = 4d(x,y)^2 .$$

On obtient ainsi une condition nécessaire pour que d corresponde aux longueurs minimales de trajectoires dans un milieu non-homogène.

— FIN —