

SESSION 2000

**Filière MP**

**MATHÉMATIQUES**

(Épreuve commune aux ENS : Ulm et Cachan)

DURÉE : 4 heures

*L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.*

**Préambule**

Dans tout le problème,  $D$  désigne le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\overset{\circ}{D}$  son intérieur. On notera  $\mathcal{B}$  l'espace vectoriel normé des fonctions continues de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{z \in D} |u(z)|.$$

On conviendra de noter indifféremment  $u(z)$  ou  $u(x,y)$  l'image par un élément  $u \in \mathcal{B}$  du vecteur  $z = (x,y)$ . Sur l'espace vectoriel orienté  $\mathbb{R}^2$  muni de sa structure euclidienne canonique, on note  $\text{SO}(\mathbb{R}^2)$  l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 et  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  celui des endomorphismes symétriques (c'est-à-dire autoadjoints). On notera  $\langle z_1, z_2 \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs  $z_1$  et  $z_2$  de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\det(z_1, z_2)$  leur déterminant dans une base orthonormée directe.

**Tournez la page S.V.P.**

On s'intéresse, pour des applications  $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , aux propriétés suivantes :

- (P1)  $\forall u \in \mathcal{B}, \forall R \in \text{SO}(\mathbb{R}^2), \quad T(x \mapsto u(x)) = T(x \mapsto u(Rx)).$
- (P2)  $\forall (u,v) \in \mathcal{B}^2, \quad (\forall x \in D, u(x) \leq v(x)) \implies T(u) \leq T(v).$
- (P3)  $\forall u \in \mathcal{B}, \forall g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissante continue}, \quad T(g \circ u) = g(T(u)).$

Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.

Seule la question III.8. utilise des résultats de la partie II.

### Première partie

Dans cette partie, pour toute fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on notera  $m(f)$  l'ensemble (éventuellement vide) des points de  $\mathbb{R}$  où  $f$  atteint un minimum absolu.

— A —

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, c'est-à-dire telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in ]0,1[, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

**I.1.a.** Montrer que si  $t$  et  $t'$  sont deux éléments de  $m(f)$  tels que  $t < t'$ , alors  $[t,t'] \subset m(f)$ .

**I.1.b.** En déduire que  $m(f)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et montrer qu'il peut être vide.

**I.2.** Montrer que pour tous réels  $a,b,c$  tels que  $a < b < c$ , on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

**I.3.** En déduire que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**I.4.** On suppose de plus que  $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$ . Montrer que  $m(f)$  n'est pas vide.

**I.5.** Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $y_1, y_2, \dots, y_n$  des nombres réels. On pose, pour  $p \in [1, +\infty[$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_p(x) = \sum_{i=1}^n |x - y_i|^p.$$

**I.5.a.** Montrer que pour tout  $p > 1$ ,  $m(f_p)$  est un singleton.

**I.5.b.** Calculer  $m(f_2)$ .

**I.5.c.** Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1, 2, \dots, n\}$  telle que

$$y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \dots \leq y_{\sigma(n)}.$$

Montrer que si  $n$  est impair, alors

$$m(f_1) = \left\{ y_{\sigma(\frac{n+1}{2})} \right\}.$$

Calculer  $m(f_1)$  lorsque  $n$  est pair.

— B —

Soit  $u$  un élément de  $\mathcal{B}$ . On désigne par  $\iint_D u(x,y) dx dy$  l'intégrale double de  $u$  sur  $D$ , soit

$$\iint_D u(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 u(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right) d\theta.$$

On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(t) = \iint_D |t - u(x,y)| dx dy.$$

**I.6.** Montrer que  $m(h) \subset \left[ \min_D u, \max_D u \right]$ .

**I.7.a.** Montrer que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in ]0,1[, \quad |\lambda a + (1-\lambda)b| \leq \lambda|a| + (1-\lambda)|b|,$$

et qu'il y a égalité si et seulement si  $ab \geq 0$ .

**I.7.b.** En déduire que  $h$  est une fonction convexe, puis que  $m(h)$  est un singleton. Dans toute la suite, on notera  $M(u)$  l'unique élément de  $m(h)$  ( $M$  est donc une application de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{R}$ ).

**I.8.** Montrer que  $M$  vérifie la propriété (P1), et que  $M(-u) = -M(u)$ .

**I.9.** On définit, pour  $\delta$  réel non nul,

$$\chi_\delta(t) = \frac{|t + \delta| - |t|}{\delta}.$$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $t \geq M(u)$
- (ii)  $\forall \delta > 0, \iint_D \chi_\delta(t - u(x,y)) dx dy \geq 0$
- (iii)  $\exists \alpha > 0, \forall \delta \in ]0, \alpha[, \iint_D \chi_\delta(t - u(x,y)) dx dy \geq 0$

**I.10.** Montrer que  $M$  vérifie la propriété (P2).

**I.11.a.** On considère une fonction  $g$  continue croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$\forall K > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (s, t, \delta) \in \mathbb{R} \times [-K, K] \times ]0, \alpha[, \chi_\delta(g(s) + \varepsilon - g(t)) \geq \chi_\delta(s - t).$$

**I.11.b.** En déduire que  $g(M(u)) + \varepsilon \geq M(g \circ u)$ , puis que  $M$  vérifie la propriété (P3).

**I.12.** Dans cette question, on considère, pour  $\alpha$  réel, la fonction

$$F(\alpha) = M \left( (x, y) \mapsto x + \frac{\alpha}{2} y^2 \right).$$

**I.12.a.** Montrer que  $F$  est impaire. En déduire  $F(0)$ .

**I.12.b.** Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R}, \forall s > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-s}^s \chi_\delta(r - x) dx = 2A(r, s),$$

$$\text{où } A(r, s) = \begin{cases} s & \text{si } r \geq s, \\ r & \text{si } -s \leq r \leq s, \\ -s & \text{si } r \leq -s. \end{cases}$$

**I.12.c.** En déduire que

$$\int_{-1}^1 A \left( F(\alpha) - \frac{\alpha}{2} y^2, \sqrt{1 - y^2} \right) dy = 0.$$

**I.12.d.** Montrer que  $F(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha}{6}$ .

## Deuxième partie

Dans cette partie, on considère une application  $T$  de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés (P1), (P2) et (P3). On définit la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & T\left((x,y) \mapsto x + \frac{t}{2}y^2\right), \end{array}$$

et pour  $h \in ]0,1]$ , on pose

$$T_h(u) = T(z \mapsto u(hz)).$$

Le but de cette partie est d'étudier le comportement de  $T_h(u)$  quand  $h$  tend vers 0.

**II.1.a.** Montrer que

$$\forall v \in \mathcal{B}, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad T(\lambda v + \mu) = \lambda T(v) + \mu.$$

**II.1.b.** Montrer que  $T$  est 1-lipschitzienne.

**II.1.c.** En déduire que  $F$  est 1/2-lipschitzienne.

**II.2.** Soit  $u$  un élément de  $\mathcal{B}$  de classe  $C^2$  sur  $\overset{\circ}{D}$ . Pour tout  $z$  dans  $\overset{\circ}{D}$ , on note  $\nabla u(z)$  le vecteur gradient de  $u$  en  $z$  et  $D^2u(z)$  sa différentielle seconde, considérée comme un élément de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ . Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in ]0,1], \forall (h,z) \in ]0,\alpha[ \times D,$$

$$\left| u(hz) - u(0) - h \langle \nabla u(0), z \rangle - \frac{h^2}{2} \langle D^2u(0)z, z \rangle \right| \leq \varepsilon h^2.$$

**II.3.** Montrer que

$$T_h(u) = u(0) + G(h\nabla u(0), h^2 D^2u(0)) + o_{h \rightarrow 0}(h^2),$$

où  $G$  est une fonction de  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathbb{R}$ .

**II.4.** Soit  $v$  un élément de  $\mathcal{B}$  de classe  $C^2$  sur  $\overset{\circ}{D}$  tel que  $v(0) = 0$  et  $\|\nabla v(0)\| = 1$ . Montrer qu'il existe un unique élément  $R$  de  $\text{SO}(\mathbb{R}^2)$  tel que l'application  $v' = v \circ R$  vérifie  $\nabla v'(0) = (1,0)$ .

**II.5.a.** Montrer que  $\forall \varepsilon > 0, \forall (x,y) \in D, |xy| \leq \varepsilon y^2 + \frac{x^2}{4\varepsilon}$ .

**II.5.b.** On note  $D^2v'(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  ( $\mathbb{R}^2$  étant muni de sa base canonique). Montrer qu'il existe une constante  $K$  et un élément  $v''$  de  $\mathcal{B}$  de classe  $C^2$  sur  $\overset{\circ}{D}$  tels que

$$v''(0) = 0, \quad \nabla v''(0) = (1,0), \quad D^2v''(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

$$\text{et } \forall \varepsilon > 0, \forall (x,y) \in D, \quad \left| v''(x,y) - v'(x,y) \right| \leq K \left( \varepsilon y^2 + \frac{x^2}{4\varepsilon} \right).$$

**II.6.a.** Montrer que pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , il existe une bijection croissante  $g_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que la fonction

$$\begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ w_{\alpha,\beta} : (x,y) & \mapsto & g_{\alpha,\beta} \left( v''(x,y) + \alpha y^2 + \beta x^2 \right). \end{array}$$

$$\text{vérifie } w_{\alpha,\beta}(0) = 0, \quad \nabla w_{\alpha,\beta}(0) = (1,0), \quad \text{et} \quad D^2 w_{\alpha,\beta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c+2\alpha \end{pmatrix}.$$

**II.6.b.** Etablir que  $g_{\alpha,\beta}^{-1}(t) = t + \underset{t \rightarrow 0}{O}(t^2)$ .

**II.7.a.** Montrer que  $T_h(w_{\alpha,\beta}) = hF(h(c+2\alpha)) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2)$ .

**II.7.b.** En déduire que

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in [-\delta, \delta], \quad |T_h(w_{\alpha,\beta}) - hF(hc)| \leq (\varepsilon + \alpha)h^2.$$

**II.8.** Montrer que si  $F(0) = 0$ , alors  $T_h(v) = hF(hc) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2)$ .

**II.9.** Soit  $p$  et  $q$  deux fonctions à valeurs réelles, et  $H(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$ . On appelle divergence de  $H$  la fonction

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}.$$

**II.9.a.** Calculer  $\left( \operatorname{div} \frac{\nabla v'}{\|\nabla v'\|} \right)(0)$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

**II.9.b.** On suppose que  $H$  est de classe  $C^1$  au voisinage de 0. Montrer que pour tout élément  $R$  de  $\operatorname{SO}(\mathbb{R}^2)$ , on a

$$\operatorname{div}(R^{-1} \circ H \circ R)(0) = (\operatorname{div} H)(0).$$

**II.10.** Soit  $u$  est un élément de  $\mathcal{B}$  de classe  $C^2$  sur  $\overset{\circ}{D}$  tel que  $\nabla u(0) \neq 0$ . Montrer que si  $F(0) = 0$ , alors

$$T_h(u) = u(0) + h \|\nabla u(0)\| F \left( h \left( \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)(0) \right) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2).$$

**II.11.** Soit  $S$  l'ensemble des segments fermés du plan, de longueur 2, et dont le milieu est en  $(0,0)$ . On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ T : u & \mapsto & \inf_{s \in S} \sup_{(x,y) \in s} u(x,y). \end{array}$$

Donner, lorsque  $u$  est un élément de  $\mathcal{B}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\overset{\circ}{D}$  tel que  $\nabla u(0) \neq 0$ , un équivalent de  $T_h(u) - u(0)$  quand  $h$  tend vers 0.

### Troisième partie

On considère un réel  $\tau$  strictement positif et une application

$$\begin{array}{ccc} C : & \mathbb{R} \times ]0, \tau[ & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (r, t) & \mapsto C(r, t) \end{array}$$

de classe  $\mathcal{C}^4$ , 1-périodique par rapport à  $r$ , et telle que  $\frac{\partial C}{\partial r}$  ne s'annule jamais. Ainsi, en tout point  $C(r, t)$  on peut définir le vecteur unitaire tangent, noté  $T(r, t)$ , le vecteur normal  $N(r, t)$  (image de  $T(r, t)$  par la rotation vectorielle d'angle  $+\pi/2$ ), et la courbure  $\kappa(r, t)$  de l'arc paramétré  $r \mapsto C(r, t)$ . On dira alors que  $C$  est solution de (P) si

$$\forall (r, t) \in \mathbb{R} \times ]0, \tau[, \quad \frac{\partial C}{\partial t}(r, t) = \kappa(r, t)N(r, t).$$

**III.1.** Déterminer toutes les fonctions  $\rho(t)$  telles que  $C(r, t) = \rho(t)(\cos 2\pi r, \sin 2\pi r)$  soit solution de (P).

**III.2.a.** On pose  $v(r, t) = \|\frac{\partial C}{\partial r}(r, t)\|$ . Montrer qu'il existe une unique application  $\varphi : \mathbb{R} \times ]0, \tau[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R} \times ]0, \tau[, \quad \int_0^{\varphi(s, t)} v(r, t) dr = s,$$

et que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $\mathbb{R} \times ]0, \tau[$ .

**III.2.b.** Pour toute fonction  $\Gamma : \mathbb{R} \times ]0, \tau[ \rightarrow \mathbb{R}$ , on note  $\hat{\Gamma}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \times ]0, \tau[$  par  $\hat{\Gamma}(s, t) = \Gamma(\varphi(s, t), t)$ . Montrer que si  $\Gamma$  est  $\mathcal{C}^1$ , alors

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R} \times ]0, \tau[, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial r}(\varphi(s, t), t) = \hat{v}(s, t) \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial s}(s, t).$$

**III.3.a.** Dans toute la suite, on suppose que  $C$  est solution de (P). Montrer que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v\kappa^2.$$

**III.3.b.** Montrer que si  $\Gamma : \mathbb{R} \times ]0, \tau[ \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) = \kappa^2 \frac{1}{v} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right).$$

**III.3.c.** En déduire que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial \kappa}{\partial r} N \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \kappa}{\partial r} T.$$

**III.4.** Montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\forall t \in ]0, \tau[, \quad \int_0^1 \kappa(r, t) v(r, t) dr = 2\pi n.$$

**III.5.** Soit  $L(t)$  le périmètre de  $r \mapsto C(r, t)$  sur une période. Montrer que  $L$  est dérivable et que

$$L'(t) = \int_0^1 -\kappa^2(r, t) v(r, t) dr.$$

En déduire que  $L(t)L'(t) \leq -4\pi^2 n^2$ .

**III.6.** Soit

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \det \left( C(r, t), \frac{\partial C}{\partial r}(r, t) \right) dr.$$

Montrer que  $A'(t) = -2\pi n$ .

**III.7.** On suppose que  $n = 1$ , que  $\lim_{t \rightarrow \tau} A(t) = 0$  et que

$$\forall t \in ]0, \tau[, \quad \frac{L^2(t)}{A(t)} \geq 4\pi.$$

Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi.$$

**III.8.** Soit  $u : \mathbb{R}^2 \times ]0, \tau[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que

$$\forall (r, t) \in \mathbb{R} \times ]0, \tau[, \quad u(C(r, t), t) = 0.$$

Montrer qu'en tout point  $(r, t)$  tel que  $\nabla u_t(C(r, t)) \neq 0$ , on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(C(r, t), t) = \left( \|\nabla u_t\| \operatorname{div} \frac{\nabla u_t}{\|\nabla u_t\|} \right) (C(r, t)),$$

où  $u_t$  désigne la restriction de  $u$  à  $t$  fixé, c'est-à-dire la fonction de deux variables réelles  $u_t : (x, y) \mapsto u(x, y, t)$ , et  $\operatorname{div}$  est l'opérateur défini au II.9.