

SESSION 2000

Filière MP

MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS : Ulm et Cachan)

DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Préambule

Dans tout le problème, D désigne le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 de \mathbb{R}^2 , et $\overset{\circ}{D}$ son intérieur. On notera \mathcal{B} l'espace vectoriel normé des fonctions continues de D dans \mathbb{R} , muni de la norme

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{z \in D} |u(z)|.$$

On conviendra de noter indifféremment $u(z)$ ou $u(x,y)$ l'image par un élément $u \in \mathcal{B}$ du vecteur $z = (x,y)$. Sur l'espace vectoriel orienté \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne canonique, on note $\text{SO}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ celui des endomorphismes symétriques (c'est-à-dire autoadjoints). On notera $\langle z_1, z_2 \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs z_1 et z_2 de \mathbb{R}^2 , et $\det(z_1, z_2)$ leur déterminant dans une base orthonormée directe.

Tournez la page S.V.P.

On s'intéresse, pour des applications $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, aux propriétés suivantes :

- (P1) $\forall u \in \mathcal{B}, \forall R \in \text{SO}(\mathbb{R}^2), \quad T(x \mapsto u(x)) = T(x \mapsto u(Rx)).$
- (P2) $\forall (u, v) \in \mathcal{B}^2, \quad \left(\forall x \in D, u(x) \leq v(x) \right) \implies T(u) \leq T(v).$
- (P3) $\forall u \in \mathcal{B}, \forall g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissante continue}, \quad T(g \circ u) = g(T(u)).$

Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.
Seule la question III.8. utilise des résultats de la partie II.

Première partie

Dans cette partie, pour toute fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on notera $m(f)$ l'ensemble (éventuellement vide) des points de \mathbb{R} où f atteint un minimum absolu.

— A —

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, c'est-à-dire telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in]0, 1[, \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

I.1.a. Montrer que si t et t' sont deux éléments de $m(f)$ tels que $t < t'$, alors $[t, t'] \subset m(f)$.

I.1.b. En déduire que $m(f)$ est un intervalle de \mathbb{R} , et montrer qu'il peut être vide.

I.2. Montrer que pour tous réels a, b, c tels que $a < b < c$, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

I.3. En déduire que f est continue sur \mathbb{R} .

I.4. On suppose de plus que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$. Montrer que $m(f)$ n'est pas vide.

I.5. Soient n un entier naturel non nul et y_1, y_2, \dots, y_n des nombres réels. On pose, pour $p \in [1, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_p(x) = \sum_{i=1}^n |x - y_i|^p.$$

I.5.a. Montrer que pour tout $p > 1$, $m(f_p)$ est un singleton.

I.5.b. Calculer $m(f_2)$.

I.5.c. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que

$$y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \dots \leq y_{\sigma(n)}.$$

Montrer que si n est impair, alors

$$m(f_1) = \left\{ y_{\sigma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right\}.$$

Calculer $m(f_1)$ lorsque n est pair.

— B —

Soit u un élément de \mathcal{B} . On désigne par $\iint_D u(x, y) \, dx dy$ l'intégrale double de u sur D , soit

$$\iint_D u(x, y) \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 u(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \right) d\theta.$$

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par

$$h(t) = \iint_D |t - u(x, y)| \, dx dy.$$

I.6. Montrer que $m(h) \subset \left[\min_D u, \max_D u \right]$.

I.7.a. Montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in]0, 1[, \quad \left| \lambda a + (1 - \lambda)b \right| \leq \lambda |a| + (1 - \lambda)|b|,$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $ab \geq 0$.

I.7.b. En déduire que h est une fonction convexe, puis que $m(h)$ est un singleton. Dans toute la suite, on notera $M(u)$ l'unique élément de $m(h)$ (M est donc une application de \mathcal{B} dans \mathbb{R}).

Tournez la page S.V.P.

I.8. Montrer que M vérifie la propriété (P1), et que $M(-u) = -M(u)$.

I.9. On définit, pour δ réel non nul,

$$\chi_\delta(t) = \frac{|t + \delta| - |t|}{\delta}.$$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $t \geq M(u)$
- (ii) $\forall \delta > 0, \iint_D \chi_\delta(t - u(x, y)) \, dx dy \geq 0$
- (iii) $\exists \alpha > 0, \forall \delta \in]0, \alpha[, \iint_D \chi_\delta(t - u(x, y)) \, dx dy \geq 0$

I.10. Montrer que M vérifie la propriété (P2).

I.11.a. On considère une fonction g continue croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que

$$\forall K > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (s, t, \delta) \in \mathbb{R} \times [-K, K] \times]0, \alpha[, \quad \chi_\delta(g(s) + \varepsilon - g(t)) \geq \chi_\delta(s - t).$$

I.11.b. En déduire que $g(M(u)) + \varepsilon \geq M(g \circ u)$, puis que M vérifie la propriété (P3).

I.12. Dans cette question, on considère, pour α réel, la fonction

$$F(\alpha) = M\left((x, y) \mapsto x + \frac{\alpha}{2}y^2\right).$$

I.12.a. Montrer que F est impaire. En déduire $F(0)$.

I.12.b. Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R}, \forall s > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-s}^s \chi_\delta(r - x) \, dx = 2A(r, s),$$

$$\text{où } A(r, s) = \begin{cases} s & \text{si } r \geq s, \\ r & \text{si } -s \leq r \leq s, \\ -s & \text{si } r \leq -s. \end{cases}$$

I.12.c. En déduire que

$$\int_{-1}^1 A\left(F(\alpha) - \frac{\alpha}{2}y^2, \sqrt{1 - y^2}\right) dy = 0.$$

I.12.d. Montrer que $F(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha}{6}$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère une application T de \mathcal{B} dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés (P1), (P2) et (P3). On définit la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & T\left((x,y) \mapsto x + \frac{t}{2}y^2\right), \end{array}$$

et pour $h \in]0,1]$, on pose

$$T_h(u) = T(z \mapsto u(hz)).$$

Le but de cette partie est d'étudier le comportement de $T_h(u)$ quand h tend vers 0.

II.1.a. Montrer que

$$\forall v \in \mathcal{B}, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad T(\lambda v + \mu) = \lambda T(v) + \mu.$$

II.1.b. Montrer que T est 1-lipschitzienne.

II.1.c. En déduire que F est 1/2-lipschitzienne.

II.2. Soit u un élément de \mathcal{B} de classe \mathcal{C}^2 sur $\overset{\circ}{D}$. Pour tout z dans $\overset{\circ}{D}$, on note $\nabla u(z)$ le vecteur gradient de u en z et $D^2u(z)$ sa différentielle seconde, considérée comme un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in]0,1], \forall (h,z) \in]0,\alpha[\times D,$$

$$\left| u(hz) - u(0) - h \langle \nabla u(0), z \rangle - \frac{h^2}{2} \langle D^2u(0)z, z \rangle \right| \leq \varepsilon h^2.$$

II.3. Montrer que

$$T_h(u) = u(0) + G(h\nabla u(0), h^2 D^2u(0)) + o_{h \rightarrow 0}(h^2),$$

où G est une fonction de $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ dans \mathbb{R} .

II.4. Soit v un élément de \mathcal{B} de classe \mathcal{C}^2 sur $\overset{\circ}{D}$ tel que $v(0) = 0$ et $\|\nabla v(0)\| = 1$. Montrer qu'il existe un unique élément R de $\text{SO}(\mathbb{R}^2)$ tel que l'application $v' = v \circ R$ vérifie $\nabla v'(0) = (1,0)$.

II.5.a. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \forall (x,y) \in D, \quad |xy| \leq \varepsilon y^2 + \frac{x^2}{4\varepsilon}.$

II.5.b. On note $D^2v'(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ (\mathbb{R}^2 étant muni de sa base canonique). Montrer qu'il existe une constante K et un élément v'' de \mathcal{B} de classe \mathcal{C}^2 sur $\overset{\circ}{D}$ tels que

$$v''(0) = 0, \quad \nabla v''(0) = (1,0), \quad D^2v''(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

Tournez la page S.V.P.

$$\text{et } \forall \varepsilon > 0, \forall (x, y) \in D, \quad \left| v''(x, y) - v'(x, y) \right| \leq K \left(\varepsilon y^2 + \frac{x^2}{4\varepsilon} \right).$$

II.6.a. Montrer que pour tous réels α et β , il existe une bijection croissante $g_{\alpha, \beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que la fonction

$$w_{\alpha, \beta} : \begin{array}{ccc} D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & g_{\alpha, \beta} \left(v''(x, y) + \alpha y^2 + \beta x^2 \right). \end{array}$$

$$\text{vérifie } w_{\alpha, \beta}(0) = 0, \quad \nabla w_{\alpha, \beta}(0) = (1, 0), \quad \text{et } D^2 w_{\alpha, \beta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c + 2\alpha \end{pmatrix}.$$

II.6.b. Etablir que $g_{\alpha, \beta}^{-1}(t) = t + O_{t \rightarrow 0}(t^2)$.

II.7.a. Montrer que $T_h(w_{\alpha, \beta}) = hF(h(c + 2\alpha)) + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$.

II.7.b. En déduire que

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h \in [-\delta, \delta], \quad |T_h(w_{\alpha, \beta}) - hF(hc)| \leq (\varepsilon + \alpha)h^2.$$

II.8. Montrer que si $F(0) = 0$, alors $T_h(v) = hF(hc) + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$.

II.9. Soit p et q deux fonctions à valeurs réelles, et $H(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$. On appelle divergence de H la fonction

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}.$$

II.9.a. Calculer $\left(\operatorname{div} \frac{\nabla v'}{\|\nabla v'\|} \right)(0)$ en fonction de a , b et c .

II.9.b. On suppose que H est de classe C^1 au voisinage de 0. Montrer que pour tout élément R de $SO(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\operatorname{div}(R^{-1} \circ H \circ R)(0) = (\operatorname{div} H)(0).$$

II.10. Soit u est un élément de \mathcal{B} de classe C^2 sur $\overset{\circ}{D}$ tel que $\nabla u(0) \neq 0$. Montrer que si $F(0) = 0$, alors

$$T_h(u) = u(0) + h \|\nabla u(0)\| F \left(h \left(\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)(0) \right) + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$$

II.11. Soit S l'ensemble des segments fermés du plan, de longueur 2, et dont le milieu est en $(0, 0)$. On considère l'application

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \inf_{s \in S} \sup_{(x, y) \in s} u(x, y). \end{array}$$

Donner, lorsque u est un élément de \mathcal{B} de classe \mathcal{C}^2 sur $\overset{\circ}{D}$ tel que $\nabla u(0) \neq 0$, un équivalent de $T_h(u) - u(0)$ quand h tend vers 0.

Troisième partie

On considère un réel τ strictement positif et une application

$$C : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times]0, \tau[& \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, t) & \mapsto & C(r, t) \end{array}$$

de classe \mathcal{C}^4 , 1-périodique par rapport à r , et telle que $\frac{\partial C}{\partial r}$ ne s'annule jamais. Ainsi, en tout point $C(r, t)$ on peut définir le vecteur unitaire tangent, noté $T(r, t)$, le vecteur normal $N(r, t)$ (image de $T(r, t)$ par la rotation vectorielle d'angle $+\pi/2$), et la courbure $\kappa(r, t)$ de l'arc paramétré $r \mapsto C(r, t)$. On dira alors que C est solution de (P) si

$$\forall (r, t) \in \mathbb{R} \times]0, \tau[, \quad \frac{\partial C}{\partial t}(r, t) = \kappa(r, t)N(r, t).$$

III.1. Déterminer toutes les fonctions $\rho(t)$ telles que $C(r, t) = \rho(t)(\cos 2\pi r, \sin 2\pi r)$ soit solution de (P).

III.2.a. On pose $v(r, t) = \|\frac{\partial C}{\partial r}(r, t)\|$. Montrer qu'il existe une unique application $\varphi : \mathbb{R} \times]0, \tau[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R} \times]0, \tau[, \quad \int_0^{\varphi(s, t)} v(r, t) dr = s,$$

et que φ est de classe \mathcal{C}^3 sur $\mathbb{R} \times]0, \tau[$.

III.2.b. Pour toute fonction $\Gamma : \mathbb{R} \times]0, \tau[\rightarrow \mathbb{R}$, on note $\hat{\Gamma}$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \times]0, \tau[$ par $\hat{\Gamma}(s, t) = \Gamma(\varphi(s, t), t)$. Montrer que si Γ est \mathcal{C}^1 , alors

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R} \times]0, \tau[, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial r}(\varphi(s, t), t) = \hat{v}(s, t) \frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial s}(s, t).$$

III.3.a. Dans toute la suite, on suppose que C est solution de (P). Montrer que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v\kappa^2.$$

III.3.b. Montrer que si $\Gamma : \mathbb{R} \times]0, \tau[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 , on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) = \kappa^2 \frac{1}{v} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right).$$

Tournez la page S.V.P.

III.3.c. En déduire que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial \kappa}{\partial r} N \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \kappa}{\partial r} T.$$

III.4. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall t \in]0, \tau[, \quad \int_0^1 \kappa(r, t) v(r, t) dr = 2\pi n.$$

III.5. Soit $L(t)$ le périmètre de $r \mapsto C(r, t)$ sur une période. Montrer que L est dérivable et que

$$L'(t) = \int_0^1 -\kappa^2(r, t) v(r, t) dr.$$

En déduire que $L(t)L'(t) \leq -4\pi^2 n^2$.

III.6. Soit

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \det \left(C(r, t), \frac{\partial C}{\partial r}(r, t) \right) dr.$$

Montrer que $A'(t) = -2\pi n$.

III.7. On suppose que $n = 1$, que $\lim_{t \rightarrow \tau} A(t) = 0$ et que

$$\forall t \in]0, \tau[, \quad \frac{L^2(t)}{A(t)} \geq 4\pi.$$

Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi.$$

III.8. Soit $u : \mathbb{R}^2 \times]0, \tau[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que

$$\forall (r, t) \in \mathbb{R} \times]0, \tau[, \quad u(C(r, t), t) = 0.$$

Montrer qu'en tout point (r, t) tel que $\nabla u_t(C(r, t)) \neq 0$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(C(r, t), t) = \left(\|\nabla u_t\| \operatorname{div} \frac{\nabla u_t}{\|\nabla u_t\|} \right) (C(r, t)),$$

où u_t désigne la restriction de u à t fixé, c'est-à-dire la fonction de deux variables réelles $u_t : (x, y) \mapsto u(x, y, t)$, et div est l'opérateur défini au II.9.