LC 112 J. 5108

SESSION 2001

Filière MP

MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS : Lyon et Cachan)

DURÉE : 4 heures

Tournez la page S.V.P.

L'espace $\mathbf{C}^n$ est considéré muni de sa structure hermitienne, c'est à dire du produit hermitien

$$< x \,,\, y > = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i$$

et de la norme

$$||x|| = < x \,,\, x >^{1/2}.$$

On note $M_n(\mathbf{C})$ l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{C}$. On identifie $M_n(\mathbf{C})$ à l'espace $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ des applications linéaires de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$. On munit $M_n(\mathbf{C})$ de sa structure naturelle d'algèbre involutive, c'est à dire :
- de sa structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel,
- du produit usuel des matrices,
- de l'involution $A \mapsto A^*$ avec

$$(A^*)_{i,j} = \overline{A_{j,i}}\,.$$

On rappelle que A^* comme opérateur sur $\mathbf{C}^n$ est caractérisé par

$$< x \,,\, Ay > = < A^* x \,,\, y >$$

pour tous $x, y \in \mathbf{C}^n$. On a alors, $(A^*)^* = A$ et $(AB)^* = B^* A^*$, pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbf{C})$. Une matrice A est dite *auto-adjointe* si elle vérifie $A^* = A$.
On rappelle que toute matrice auto-adjointe a ses valeurs propres réelles et se diagonalise dans une base orthonormée pour le produit hermitien.

On rappelle enfin que la norme usuelle sur $M_n(\mathbf{C})$ est donnée par

$$|||A||| = \sup\{||Av||; v \in \mathbf{C}^n, ||v|| = 1\}\,.$$

I. Normes

1) a) Calculez la norme d'une matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$ qui est diagonale dans la base canonique.

b) Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ et $D = A^* A$. Montrez que toutes les valeurs propres de D sont positives.

c) Montrez que pour tout $A \in M_n(\mathbf{C})$ on a

$$|||A||| = \sqrt{\max\{\mu_j; j = 1, \ldots, n\}}$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont les valeurs propres de $D = A^* A$.

d) Montrez que $|||A^* A||| = |||A|||^2$, pour tout $A \in M_n(\mathbf{C})$.

2) Soit m une norme sur $M_n(\mathbf{C})$ telle que $m(A^* A) = m(A)^2$ pour tout $A \in M_n(\mathbf{C})$. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ et $D = A^* A$.

a) Soient $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n \geq 0$ les valeurs propres de D. Montrez que

$$\mu_1 = \inf\{r \in \mathbf{R}^+; \lim_{l \to +\infty} m\left(\left(\frac{1}{r} D\right)^{2^l}\right) = 0\}.$$

b) Montrez que la seule norme sur $M_n(\mathbf{C})$ qui vérifie $m(A^* A) = m(A)^2$, pour tout $A \in M_n(\mathbf{C})$, est la norme usuelle $||| \cdot |||$.

II. Commutants

Soit $\mathcal{S}$ une sous-algèbre de $M_n(\mathbf{C}) = \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. On dit que $\mathcal{S}$ est *auto-adjointe* si pour tout $A \in \mathcal{S}$ on a $A^* \in \mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S}$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbf{C})$, contenant la matrice identité I, et que $\mathcal{S}$ est auto-adjointe, on dit que $\mathcal{S}$ est une *sous $*$-algèbre de* $M_n(\mathbf{C})$.
Pour toute sous $*$-algèbre $\mathcal{S}$ de $M_n(\mathbf{C})$, on pose

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}' &= \{A \in M_n(\mathbf{C}); AS = SA \text{ pour tout } S \in \mathcal{S}\}\\
\mathcal{S}'' &= (\mathcal{S}')'\\
&\vdots\\
\mathcal{S}^{(m+1)} &= \left(\mathcal{S}^{(m)}\right)'\\
&\vdots
\end{aligned}$$

1) Montrez que $\mathcal{S}'$ est une sous $*$-algèbre de $M_n(\mathbf{C})$.

2) Montrez que

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'' = \mathcal{S}^{(4)} = \ldots = \mathcal{S}^{(2n)} = \ldots$$

et que

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S}''' = \ldots = \mathcal{S}^{(2n+1)} = \ldots.$$

3) Soit E un sous-espace de $\mathbf{C}^n$ et P_E le projecteur orthogonal de $\mathbf{C}^n$ sur E. On dit que E est *invariant* par $\mathcal{S}$ si $AE \subset E$ pour tout $A \in \mathcal{S}$ (avec $AE = \{Av; v \in E\}$).
Montrez que E est invariant par $\mathcal{S}$ si et seulement si $P_E \in \mathcal{S}'$.

4) Soit $\mathcal{K} = \mathbf{C}^{n^2}$. On identifie $\mathcal{K}$ à $\mathbf{C}^n \times \ldots \times \mathbf{C}^n$ en identifiant le vecteur $(x_1, \ldots, x_{n^2})$ au vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$, où $X_i = (x_{(i-1)n+1}, \ldots, x_{in})$. On identifie ainsi $\mathcal{L}(\mathcal{K}) = M_{n^2}(\mathbf{C})$ à $M_n(M_n(\mathbf{C}))$ (les matrices $n \times n$ à coefficients dans $M_n(\mathbf{C})$).
Soit

$$\begin{array}{cccc}
\Pi : & M_n(\mathbf{C}) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{K})\\
 & A & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 & \ldots & 0\\ 0 & A & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & A \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille d'éléments de $\mathbf{C}^n$ et

$$v = \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{K}.$$

Soit maintenant $\mathcal{S}$ une sous $*$-algèbre de $M_n(\mathbf{C})$. On pose $\Pi(\mathcal{S})v = \{\Pi(A)v; A \in \mathcal{S}\}$.

a) Montrez que $\Pi(\mathcal{S})v$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}$.

Soit P le projecteur orthogonal de $\mathcal{K}$ sur $\Pi(\mathcal{S})v$.
b) Montrez que $P \in \Pi(\mathcal{S})'$ (le ' est sous-entendu dans $\mathcal{L}(\mathcal{K})$).

c) Montrez que $\Pi(\mathcal{S})' = M_n(\mathcal{S}')$.

d) Montrez que $\Pi(\mathcal{S}'') \subset M_n(\mathcal{S}')'$.

e) Soit $B \in \mathcal{S}''$, montrez que $\Pi(\mathcal{S})v$ est invariant par $\Pi(B)$.

f) En déduire que $\mathcal{S} = \mathcal{S}''$.

Tournez la page S.V.P.

5) Soit $\mathcal{S}$ une sous $*$-algèbre de $M_n(\mathbf{C})$.

a) Montrez que si $A \in \mathcal{S}$ vérifie $A^* = A$, alors A s'écrit

$$A = \sum_{k=1}^{l} \mu_k P_k$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_l \in \mathbf{R}$ et où les P_k sont des projecteurs orthogonaux qui *appartiennent à* $\mathcal{S}$.

b) En déduire que si $\mathcal{S}$ est une sous $*$-algèbre de $M_n(\mathbf{C})$ qui n'admet pas d'espace invariant E autre que $\{0\}$ et $M_n(\mathbf{C})$, alors $\mathcal{S} = M_n(\mathbf{C})$ (Indication : Montrez que $\mathcal{S}'$ est réduit aux multiples de l'identité).

III. Algèbres de Clifford

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Considérons l'algèbre $M_{2^n}(\mathbf{C}) = \mathcal{L}(\mathbf{C}^{2^n})$. On choisit une base orthonormée quelconque de $\mathbf{C}^{2^n}$, mais on choisit de l'indexer par $\mathcal{P}$, l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$. Soit $\{e_A, A \in \mathcal{P}\}$ une telle base orthonormée. Pour tout $A \in \mathcal{P}$ on définit l'application linéaire a_A par

$$a_A e_B = \begin{cases} e_{B \setminus A} & \text{si } A \subset B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $B \in \mathcal{P}$.

1) a) Dans le cas $n = 1$, écrire la matrice de $a_{\{1\}} \in M_2(\mathbf{C})$. Dans le cas $n = 2$, écrire la matrice de $a_{\{1\}}$ et de $a_{\{2\}} \in M_4(\mathbf{C})$.

b) Dans le cas général, montrez que a_A^* est donné par

$$a_A^* e_B = \begin{cases} e_{B \cup A} & \text{si } A \cap B = \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c) On considère $\mathcal{S}_n$ le sous-espace de $M_{2^n}(\mathbf{C})$ formé par les combinaisons linéaires de matrices de la forme $a_A^* a_B$, $A, B \in \mathcal{P}$. Montrez que $\mathcal{S}_n$ est une sous $*$-algèbre de $M_{2^n}(\mathbf{C})$.

d) Montrez que $\mathcal{S}_n = M_{2^n}(\mathbf{C})$.

2) Dans le cas $n = 1$, on note $\Omega = e_\emptyset$, $a = a_{\{1\}}$ et $w(z) = \exp(z a^* - \overline{z} a)$, pour $z \in \mathbf{C}$.
Dans le cas général on note $\Omega_n = e_\emptyset$,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(a_{\{1\}} + \ldots + a_{\{n\}})$$

et $W_n(z) = \exp(z B_n^* - \overline{z} B_n)$, pour $z \in \mathbf{C}$.

a) Montrez que $W_n(z) = \exp(\frac{z a_{\{1\}}^* - \overline{z} a_{\{1\}}}{\sqrt{n}}) \ldots \exp(\frac{z a_{\{n\}}^* - \overline{z} a_{\{n\}}}{\sqrt{n}})$.

b) Montrez que, pour tous polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ à une variable, on a

$$\begin{aligned} &< \Omega_n \, , \, P_1(\frac{z a_{\{1\}}^* - \overline{z} a_{\{1\}}}{\sqrt{n}}) \ldots P_n(\frac{z a_{\{n\}}^* - \overline{z} a_{\{n\}}}{\sqrt{n}}) \, \Omega_n > = \\ &= < \Omega \, , \, P_1(\frac{z a^* - \overline{z} a}{\sqrt{n}}) \, \Omega > \ldots < \Omega \, , \, P_n(\frac{z a^* - \overline{z} a}{\sqrt{n}}) \, \Omega >. \end{aligned}$$

c) En déduire que $< \Omega_n \, , \, W_n(z) \Omega_n > = < \Omega \, , \, w(z/\sqrt{n}) \Omega >^n$.

d) En déduire $\lim_{n \to +\infty} < \Omega_n \, , \, W_n(z) \Omega_n >$.