Correction ENS D (6h) - 2025

Jean Nougayrède et Pierre Vandaële

6 mai 2025

Avertissement. Le corrigé s'arrête à la question 37 (incluse). Il y a probablement des coquilles mais ce n'est pas la peine de nous les signaler : nous ne toucherons plus à ce document à partir de maintenant et jusqu'à désormais.

Partie préliminaire

1. L'ensemble des fonctions périodiques de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel : si $a, b : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sont périodiques de périodes respectives m_1, m_2 alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $a + \lambda b$ est $m_1 m_2$ périodique.

   On en déduit que l'ensemble des fonctions quasi-polynomiales forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Soit $P, Q : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ quasi-polynomiales coïncidant sur $\mathbb{N}$. La fonction $R = P - Q$ est quasi-polynomiale.

   Si par l'absurde $R \neq 0$, on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ et $c_0, \ldots, c_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ périodiques, avec $c_k \neq 0$, telles que :

   $$\forall n \in \mathbb{Z},\ R(n) = \sum_{i=0}^{k} c_i(n) n^i.$$

   c_k est périodique non nulle donc on peut trouver $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $c_k(r) \neq 0$ et en notant $m \in \mathbb{N}^*$ une période de c_k :

   $$0 = R(nm + r) \underset{n \to +\infty}{=} c_k(r) m^k n^k + o(n^k)$$

   Ce qui est absurde donc $R = 0$ puis $P = Q$.
3. Soit $P : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

   • Si P est quasi-polynomiale, on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ et $c_0, \ldots, c_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ périodiques telles que

   $$P : n \mapsto \sum_{i=0}^{k} c_i(n) n^i.$$

   On note $m \in \mathbb{N}^*$ une période commune à $c_0, \ldots, c_k$. Pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$, on pose $P_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} c_i(j) X^i$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $n \equiv j\ \ [m]$, $P(n) = P_j(n)$.

   • On suppose qu'on peut trouver $m \in \mathbb{N}^*$ et $P_0, \ldots, P_{m-1} \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en notant j le reste de la division euclidienne de n par m, $P(n) = P_j(n)$. On peut trouver $k \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 \leqslant j \leqslant m-1}}$ une famille de complexes telles que pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$, $P_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_{i,j} X^i$. Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, on pose $c_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui à $n \in \mathbb{Z}$ associe $a_{i,j}$ où j est le reste de la division euclidienne de n par m de sorte que $P : n \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{k} c_i(n) n^i$ soit quasi-polynomiale.

4. On peut trouver $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega^m = 1$. On définit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

   f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

   Ainsi f est p-fois dérivable et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{(p-1)!}{(1-x)^p} = f^{(p-1)}(x) = \sum_{n=p-1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(p-2))x^{n-(p-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+p-1)\dots(n+1)x^n.$$

   Ainsi pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-\omega x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p-1)\dots(n+1)}{(p-1)!}\omega^n x^n$.

   On pose $P = \dfrac{(X+p-1)\dots(X+1)}{(p-1)!} \in \mathbb{C}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n) = \omega^n P(n)$ or $n \mapsto \omega^n P(n)$ est quasi polynomiale car pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en notant j le reste de la division euclidienne de n par m, $\omega^n P(n) = \omega^j P(n)$ et $\omega^j P \in \mathbb{C}[X]$. P est de degré $p-1$ et a pour coefficient dominant $\dfrac{1}{(p-1)!}$ donc :

   $\boxed{R \text{ est quasi polynomiale, de degré } p-1 \text{ et a pour coefficient dominant } n \mapsto \dfrac{\omega^n}{(p-1)!}.}$

1 Décomposition d'un entier en parties

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $a_i \geqslant 1$ donc $P(n) \leqslant \mathrm{card}([\![0,n]\!]^k) = (n+1)^k$.
   $\dfrac{(n+2)^k}{(n+1)^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc de la règle de d'Alembert la série entière $\sum (n+1)^k x^n$ a pour rayon de convergence 1 or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant P(n) \leqslant (n+1)^k$ donc : $\boxed{\text{le rayon de convergence de } F \text{ est supérieur ou égal à 1.}}$
6. Soit $x \in]-1,1[$. On somme des réels positifs :

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k}\sum_{n_i=0}^{+\infty} x^{n a_i} = \sum_{n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}} x^{n_1 a_1 + \dots + n_k a_k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N} \\ n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = n}} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) x^n = F(x).$$

   $\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ \prod_{i=1}^{k} \dfrac{1}{1-x^{a_i}} = F(x).}$

7. et 8. Si $k=1$, pour tout $x \in]-1,1[$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n a_1}$ donc :

   $\boxed{\text{Si } k=1,\ P : n \mapsto \mathbb{1}_{a_1 | n} \text{ est quasi-polynomiale de degré 0 et de coefficient dominant } n \mapsto \mathbb{1}_{a_1|n}.}$

   On suppose désormais que $k > 1$.
   Pour tout $i \neq j \in [\![1,k]\!]$, a_i et a_j sont premiers entre eux donc $\mathbb{U}_{a_i} \cap \mathbb{U}_{a_j} = \{1\}$ or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - X^n = \displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1-\omega X)$ donc en posant $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} \mathbb{U}_{a_i} \setminus \{1\}$:

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-X^{a_i}} = \frac{1}{(1-X)^k} \prod_{\omega \in \Omega} \frac{1}{1-\omega X}.$$

Les éléments de Ω sont deux à deux distincts donc, décomposant en éléments simples ce produit, on peut trouver $\lambda_1, \dots,$ $\mathbb{C}$ et $(\lambda_\omega)_{\omega\in\Omega}$ des complexes tels que $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-X^{a_i}} = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{\lambda_\omega}{1-\omega X} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{(1-X)^i}$.

On a $\displaystyle\frac{\lambda_k}{(1-x)^k} \underset{x\to 1^-}{\sim} F(x)$ donc $\displaystyle\lambda_k \underset{x\to 1^-}{\sim} (1-x)^k F(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-x}{1-x^{a_i}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$.

En particulier $\lambda_k \neq 0$. Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, par 4, on peut trouver P_i quasi-polynomiale de degré $i-1$ telle que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_i(n)x^n$. Ainsi par unicité du développement en séries entières de F :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ P(n) = \sum_{\omega\in\Omega} \lambda_\omega \omega^n + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i(n).$$

Ainsi par 1 et 4 : $\boxed{P \text{ est quasi-polynomiale de degré } k-1 \text{ et a pour coefficient dominant } \dfrac{1}{(k-1)!\prod_{i=1}^{k} a_i}}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2$, si $2n_1 + 3n_2 = n$ alors $n_2 \equiv n\ [2]$.
Ainsi, si n est pair, $\{(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2,\ 2n_1+3n_2 = n\} = \{(\frac{n-6k}{2}, 2k),\ k\in\mathbb{N},\ n-6k \geqslant 0\}$ est de cardinal $\left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor + 1$. Si n est impair, $\{(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2,\ 2n_1+3n_2 = n\} = \{(\frac{n-6k-3}{2}, 2k+1),\ k\in\mathbb{N},\ n-6k-3 \geqslant 0\}$ est de cardinal $\left\lfloor \dfrac{n-3}{6} \right\rfloor + 1$.
On pose $r : \mathbb{Z} \to [\![0,5]\!]$ qui à n associe le reste de la division euclidienne de n par 6.
$\boxed{\text{En posant } \varphi : n \mapsto 6\mathbb{1}_{n\not\equiv 1\ [6]} - r(n), \text{ on a } P : n \mapsto \frac{n+\varphi(n)}{6}.}$

10. $\boxed{\mathbb{U}_a^* = \mathbb{U}_a \setminus \{1\}}$ et $\boxed{\mathbb{U}_b^* = \mathbb{U}_b \setminus \{1\}}$ sont disjoints et $\displaystyle\frac{1}{(1-X^a)(1-X^b)} = \frac{1}{(1-X)^2 \prod_{\omega\in\mathbb{U}_a^*}(1-\omega X) \prod_{\omega\in\mathbb{U}_b^*}(1-\omega X)}$
donc on peut trouver des complexes $\alpha, \beta, (\lambda_\omega)_{\omega\in\mathbb{U}_a^*}, (\mu_\omega)_{\omega\in\mathbb{U}_b^*}$ tels que

$$\frac{1}{(1-X^a)(1-X^b)} = \frac{\alpha}{1-X} + \frac{\beta}{(1-X)^2} + \sum_{\omega\in\mathbb{U}_a^*} \frac{\lambda_\omega}{1-\omega X} + \sum_{\omega\in\mathbb{U}_b^*} \frac{\mu_\omega}{1-\omega X}.$$

Soit $\omega \in \mathbb{U}_a^*$. On a $\displaystyle\lambda_\omega = \lim_{x\to\overline{\omega}} \frac{1-\omega x}{(1-x^a)(1-x^b)} = \omega \lim_{x\to\overline{\omega}} \frac{\overline{\omega}-x}{1-x^a}\frac{1}{1-x^b} = \frac{\omega}{a\overline{\omega}^{a-1}}\frac{1}{1-\overline{\omega}^b} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\overline{\omega}^b}$.

De même on montre que pour tout $\omega \in \mathbb{U}_b^*$, $\mu_\omega = \dfrac{1}{b}\dfrac{1}{1-\overline{\omega}^a}$.

Enfin pour x au voisinage de 1 et $h = 1-x$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)} &= \frac{1}{(1-(1-h)^a)(1-(1-h)^b)} = \frac{1}{ah - \frac{a(a-1)}{2}h^2 + o(h^2)}\frac{1}{bh - \frac{b(b-1)}{2}h^2 + o(h^2)} \\ &= \frac{1}{abh^2}\frac{1}{1-\frac{a+b-2}{2}h + o(h)} = \frac{1}{abh^2} + \frac{a+b-2}{2abh} + o\left(\frac{1}{h}\right).\end{aligned}$$

Par unicité du développement asymptotique, $\beta = \dfrac{1}{ab}$ et $\alpha = \dfrac{a+b-2}{2ab} = \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{2a} - \dfrac{1}{ab}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par unicité du développement en série entière de F, on a

$$P(n) = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{ab}(n+1) + \frac{1}{a}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_a^*} \frac{\omega^n}{1-\overline{\omega}^b} + \frac{1}{b}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_b^*} \frac{\omega^n}{1-\overline{\omega}^a}$$

On conclut car $\mathbb{U}_a^* = \{\omega_a^{-j},\ j \in [\![1, a-1]\!]\}$ et $\mathbb{U}_b^* = \{\omega_b^{-j},\ j \in [\![1, b-1]\!]\}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{n}{ab} + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1-\omega_a^{jb}} + \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{-jn}}{1-\omega_b^{ja}}.}$$

11. a et b sont premiers entre eux donc du théorème de Bezout, a^* et b^* existent.

    Soit $n \in \mathbb{N}$ et r le reste de la division euclidienne de n par a. On commence par remarquer que $r = n - a\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$ autrement dit que $\frac{r}{a} = \{\frac{n}{a}\}$. Si $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $an_1 + n_2 = n$ alors $n_2 \equiv r\ \ [a]$ donc $\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2,\ an_1 + n_2 = n\} = \{(\frac{n-ak-r}{a}, ak+r),\ k \in \mathbb{N},\ n - ak - r \geqslant 0\}$ est de cardinal $\frac{n-r}{a} + 1$. En appliquant la question précédente avec $b = 1$ on en déduit que $\dfrac{n}{a} - \{\dfrac{n}{a}\} + 1 = \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{a} + \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1-\omega_a^j}$ autrement dit que

$$\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1-\omega_a^j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} - \left\{\frac{n}{a}\right\}$$

    Puisque b^* est premier avec a, $\omega_a^{b^*}$ engendre $\mathbb{U}_a$ et remarquant que $\omega_a^{b^*b} = \omega_a$, on trouve :

$$\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jn}}{1-\omega_a^{jb}} = \frac{1}{a}\sum_{\omega \in \mathbb{U}_a^*} \frac{\overline{\omega}^n}{1-\omega^b} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jb^*n}}{1-\omega_a^{jb^*b}} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a-1} \frac{\omega_a^{-jb^*n}}{1-\omega_a^{j}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} - \left\{\frac{b^*n}{a}\right\}$$

    De même $\dfrac{1}{b}\displaystyle\sum_{j=1}^{b-1} \frac{\omega_b^{-jn}}{1-\omega_b^{ja}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2b} - \left\{\dfrac{a^*n}{b}\right\}$ ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = \frac{n}{ab} - \left\{\frac{b^*n}{a}\right\} - \left\{\frac{a^*n}{b}\right\} + 1.}$$

2 Étude des polytopes

2.1 Enveloppe convexe des sommets

12. Soit F une face de P et $J \subset I$ tel que $F = F_J$. F est non vide par définition.

    Pour tout $i \in I$, ℓ_i est continue et $F = \displaystyle\bigcap_{i \in I} \ell_i^{-1}(]-\infty, a_i]) \cap \bigcap_{j \in J} \ell_j^{-1}(\{a_j\})$ donc F est fermé or $F \subset P$ compact donc F est compact.

    De plus $F = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in I,\ \ell_i(x) \leqslant a_i \text{ et } \forall j \in J,\ -\ell_j(x) \leqslant -a_j\}$ donc $\boxed{F \text{ est un polytope.}}$

    On a $F \subset P$ donc $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{P}$ puis $\dim F \leqslant \dim P$.

    Si $\dim F = \dim P$ par inclusion et égalité des dimensions, $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{P}$. Soit $j \in J$. Pour tout $(x, y) \in F^2$, $\ell_j(x-y) = a_j - a_j = 0$ donc par linéarité de ℓ_j, $\overrightarrow{F} \subset \mathrm{Ker}(\ell_j)$. Soit $x \in P$. $F \neq \varnothing$ donc on peut trouver $f \in F$. Comme $x, f \in P$, $x - f \in \overrightarrow{P} = \overrightarrow{F}$ puis $\ell_j(x-f) = 0$ et ainsi $\ell_j(x) = \ell_j(f) = a_j$. Ce qui prouve que $P \subset F$ puis que $P = F$. Par contraposition : $\boxed{\text{si } F \neq P \text{ alors } \dim F < \dim P.}$

13. I est fini donc $\mathcal{P}(I)$ est fini or par définition on a une surjection de $\mathcal{P}(I)$ sur l'ensemble des faces de P donc $\boxed{P \text{ a un nombre fini de faces.}}$

    Il suffit ensuite de montrer que tout polytope de dimension non nulle admet une face de dimension strictement inférieure pour conclure car P ayant un nombre fini de face, P admet une face de dimension minimale qui est alors nécessairement un sommet.

    On suppose donc que P est un polytope de dimension non nulle. On peut donc trouver $x \neq y$ dans P.

<u>Lemme Q13</u> : si $x \neq y$ appartiennent à P alors on peut trouver des réels $a \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant b$ tels que

$$\{t \in \mathbb{R}^+,\ x + t(y-x) \in P\} = [a,b]$$

et il existe des faces F_1 et F_2 strictement incluses dans P telles que $x+a(y-x) \in F_1$ et $x+b(y-x) \in F_2$.

Ce qui prouve en particulier que P admet une face de dimension strictement inférieure.

Preuve du lemme : $D = \{t \in \mathbb{R}^+,\ x + t(y-x) \in P\}$ n'est pas vide car contient 0 et 1. P est compact et $y - x \neq 0$ donc D est borné. De plus D est fermé (image réciproque du fermé P par $t \mapsto x + t(y-x)$ continue). Enfin D est convexe par convexité de P ce qui prouve l'existence des réels a et b. Soit $c \in \{a,b\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, $x + t(y-x) \notin P$ et I étant fini, on peut trouver $k \in I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}\setminus[a,b])^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n = x + u_n(y-x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} z = x + c(y-x)$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell_k(z_n) > a_k$. Par passage à la limite, $\ell_k(z) \geqslant a_k$ or $z \in P$ donc $\ell_k(z) \leqslant a_k$ puis $\ell_k(z) = a_k$.

On pose $J = \{j \in I,\ \ell_j(z) = a_j\}$ qui est non vide car $k \in J$ et on considère $F = F_J$. F est non vide car $z \in F$ et $F \subsetneq P$ car x ou y n'appartient pas à F : en effet $\ell_k(z_0) > \ell_k(z)$ donc $(u_0 - c)\ell_k(y-x) > 0$ et ainsi $\ell_k(y-x) \neq 0$.

$\boxed{P \text{ a au moins un sommet.}}$

14. Pour tout polytope Q, on note V_Q l'ensemble de ses sommets. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$: « si Q est un polytope de dimension n alors $Q = \mathrm{Conv}(V_Q)$. »

    Soit Q est un polytope de dimension 0. $Q = V_Q$ est un singleton d'où $\mathcal{H}_0$.

    Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_n$ et soit Q un polytope de dimension $n+1$. Soit $x \in Q$.

    Comme $n+1 > 0$, on peut trouver $y \in Q \setminus \{x\}$. Du lemme Q13, on peut trouver F_1, F_2 des faces de P de dimensions strictement inférieures et $s \geqslant 1$, $t \geqslant 0$ tels que $z = x + s(y-x) \in F_1$ et $\omega = x + t(x-y) \in F_2$. On a $V_{F_1} \cup V_{F_2} \subset V_Q$ donc par hypothèses de récurrence, $F_1 \cup F_2 \subset \mathrm{Conv}(V_Q)$. Ainsi $z, \omega \in \mathrm{Conv}(V_Q)$ puis par convexité $x = \dfrac{tz + s\omega}{t+s} \in \mathrm{Conv}(V_Q)$.

    Ainsi $Q \subset \mathrm{Conv}(V_Q)$ et par convexité de Q on a l'autre inclusion d'où $\mathcal{H}_{n+1}$. $\boxed{P = \mathrm{Conv}(V).}$

15. L'image d'un polytope par une translation est un polytope, il suffit donc de se ramener au cas où $\mathrm{Conv}(V)$ est d'intérieur non vide. Quitte à translater, on peut supposer que $0 \in V$.

    • Montrons que $\mathrm{Conv}(V)$ est d'intérieur non vide dans $\overrightarrow{V}$. On peut trouver $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\overrightarrow{V}$ incluse dans V. On munit $\overrightarrow{V}$ de la norme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i e_i \mapsto \sup_{1\leqslant i\leqslant p} |x_i|$ et on pose $x_0 = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} e_i \in \mathrm{Conv}(V)$.

    Soit $x \in B\left(0, \frac{1}{p(p+1)}\right)$. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{1}{p+1} + x_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(\frac{1}{p+1} + x_i) \leqslant \frac{p}{p+1} + \frac{p}{p(p+1)} = 1$ donc

    $$x_0 + x = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{p+1} + x_i\right)e_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{p}(\frac{1}{p+1} + x_i)\right)0 \in \mathrm{Conv}(V) \text{ puis } B\left(x_0, \tfrac{1}{p(p+1)}\right) \subset \mathrm{Conv}(V).$$

    • $\mathrm{Conv}(V)$ est d'intérieur non vide dans $\overrightarrow{V}$. Supposons que cela suffise pour affirmer que $\mathrm{Conv}(V)$ est un polytope de $\overrightarrow{V}$: il existe $(\ell_i)_{i\in I}$ des formes linéaires sur $\overrightarrow{V}$ et $(a_i)_{i\in I}$ des réels tels que

    $$\mathrm{Conv}(V) = \{x \in \overrightarrow{V},\ \forall i \in I,\ \ell_i(x) \leqslant a_i\}.$$

    Pour tout $i \in I$, en l'annulant sur un supplémentaire de $\overrightarrow{V}$, on prolonge ℓ_i à $\mathbb{R}^n$ en une forme linéaire $\hat{\ell}_i$. De plus $\overrightarrow{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension finie donc s'écrit comme une intersection finie d'hyperplans : on peut trouver $(f_j)_{j\in J}$ une famille de formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\overrightarrow{V} = \displaystyle\bigcap_{j\in J} \mathrm{Ker}(f_j)$.

    $\mathrm{Conv}(V)$ est un compact non vide de $\overrightarrow{V}$ donc de $\mathbb{R}^n$ et ainsi

    $$\mathrm{Conv}(V) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in I,\ \hat{\ell}_i(x) \leqslant a_i \text{ et } \forall j \in J,\ f_j(x) \leqslant 0 \text{ et } \forall j \in J,\ -f_j(x) \leqslant 0\}$$

    est bien un polytope de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{Pour montrer que Conv}(V)\text{ est un polytope, il suffit de traiter le cas 0 est dans l'intérieur de Conv}(V).}$

Remarque : si 0 *est dans l'intérieur de Conv*(V)*, aucun hyperplan ne contient Conv*(V)*.*

16. Pour tout $x \in V$, $f_x : \ell \mapsto \langle \ell, x\rangle$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, V est fini et
$$Q = \{\ell \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in V,\ f_x(\ell) \leqslant 1\}.$$
Il reste donc à montrer que Q est compact non vide pour conclure. Q est <u>non vide</u> car $0 \in Q$.
Pour tout $x \in V$, f_x est continue donc $Q = \bigcap_{x\in V} f_x^{-1}(]-\infty, 1])$ est <u>fermé</u>.
On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $|\cdot|$ et par hypothèse il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0,\varepsilon) \subset \mathrm{Conv}(V)$.
Soit $\ell \in Q$ non nul. On remarque que pour tout $x \in \mathrm{Conv}(V)$, $\langle \ell, x\rangle \leqslant 1$ or $\dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{\ell}{|\ell|} \in B(0,\varepsilon) \subset \mathrm{Conv}(V)$ donc $\dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{|\ell|^2}{|\ell|} \leqslant 1$ et ainsi $Q \subset B(0, \frac{2}{\varepsilon})$ donc Q est <u>borné</u>. $\boxed{Q \text{ est un polytope.}}$
17. Par 14, on peut trouver un ensemble fini non vide W tel que $Q = \mathrm{Conv}(W)$.
On pose $R = \{r \in \mathbb{R}^n,\ \forall q \in W,\ \langle r, q\rangle \leqslant 1\}$. Q contient le voisinage de 0 $\{q \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in V,\ \langle q, x\rangle < 1\}$ donc Q est d'intérieur non vide (donc n'est pas inclus dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$) et ainsi par 16, R est un polytope de $\mathbb{R}^n$. Montrons que $R = \mathrm{Conv}(V)$ pour conclure.
Soit $x \in \mathrm{Conv}(V)$: pour tout $q \in Q$, $\langle q, x\rangle \leqslant 1$ donc $x \in R$. Ainsi $\mathrm{Conv}(V) \subset R$.
Supposons, par l'absurde, qu'on peut trouver $r \in R \setminus \mathrm{Conv}(V)$. L'ensemble $\mathrm{Conv}(V)$ étant convexe fermé non vide, on peut trouver $y \in \mathrm{Conv}(V)$ tel que pour tout $x \in \mathrm{Conv}(V)$, $\langle r-y, x-y\rangle \leqslant 0$. En particulier, comme $0 \in \mathrm{Conv}(V)$, on a $\lambda = \langle r-y, y\rangle \geqslant 0$. Si $\lambda > 0$ alors pour tout $x \in \mathrm{Conv}(V)$, $\langle \lambda^{-1}(r-y), x\rangle \leqslant 1$ donc $\lambda^{-1}(r-y) \in Q$ or $r \in R$ donc $\langle r, \lambda^{-1}(r-y)\rangle \leqslant 1$ puis $\langle r, r-y\rangle \leqslant \langle r-y, y\rangle$ et enfin $|r-y|^2 \leqslant 0$. Si $\lambda = 0$, pour tout $x \in \mathrm{Conv}(V)$, $\langle r-y, x\rangle \leqslant 0$ or $\mathrm{Conv}(V)$ contenant un voisinage de 0, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon(r-y) \in \mathrm{Conv}(V)$ et ainsi $\varepsilon|r-y|^2 \leqslant 0$. Dans tous les cas $r = y \in \mathrm{Conv}(V)$, ce qui est absurde. Ainsi $R = \mathrm{Conv}(V)$. $\boxed{\mathrm{Conv}(V) \text{ est un polytope.}}$
18. $\mathrm{Conv}(V)$ est un polytope donc on peut trouver $(\ell_i)_{i\in I}$ des formes linéaires et $(a_i)_{i\in I}$ des réels tels que
$$\mathrm{Conv}(V) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in I,\ \ell_i(x) \leqslant a_i\}.$$
Soit s un sommet de $\mathrm{Conv}(V)$.
On peut trouver $J \subset I$ tel que $\{s\} = \{x \in \mathrm{Conv}(V),\ \forall j \in J,\ \ell_j(x) = a_j\}$.
$s \in \mathrm{Conv}(V)$ donc on peut trouver $p \in \mathbb{N}^*$, $(v_1, \dots, v_p) \in V^p$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \geqslant 0$ de somme 1 tels que $s = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i$. On peut trouver $i_0 \in I$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Soit $j \in J$. On a $a_j = \sum_{i=1}^p \lambda_i \ell_j(v_i) \leqslant \sum_{i=1}^p \lambda_i a_j = a_j$ donc pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda_i \ell_j(v_i) = \lambda_i a_j$ et en particulier pour tout $j \in J$, $\ell_j(v_{i_0}) = a_j$ donc $s = v_{i_0} \in V$.
$\boxed{\text{Tout sommet de Conv}(V)\text{ appartient à } V.}$

2.2 Formule d'Euler

19. Les polytopes de $\mathbb{R}$ sont les segments donc $\mathcal{U}_1 = \mathrm{Vect}((\mathbb{1}_{[a,b]})_{a\leqslant b})$ or pour tous réels $a \leqslant b$, $\mathbb{1}_{[a,b]}$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{a,b\}$ et admet une limite à droite en a et b, ce qui prouve l'assertion car tout élément de $\mathcal{U}_1$ est combinaison linéaire (finie) de telles fonctions.
20. Soit P un polytope de $\mathbb{R}^n$, $(\ell_i)_{i\in I}$ une famille finie de formes linéaires et $(a_i)_{i\in I}$ de réels tels que
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in I,\ \ell_i(x) \leqslant a_i\}.$$
Soit $z \in \mathbb{R}$. On considère, pour tout $i \in I$, $\hat{\ell}_i : (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \ell_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ forme linéaire de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\hat{a}_i = a_i - \ell_i(0, \dots, 0, z)$. On pose $\hat{P}_z = \{x \in \mathbb{R}^{n-1},\ \forall i \in I,\ \hat{\ell}_i(x) \leqslant \hat{a}_i\}$ et on remarque que $(\mathbb{1}_P)_z = \mathbb{1}_{\hat{P}_z}$.
$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n = z\}$ est fermé dans un compact donc est compact or $p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$ est continue donc $\hat{P}_z = p(P)$ est un compact. Si $\hat{P}_z$ est vide, $\mathbb{1}_{\hat{P}_z} = 0$ appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{U}_{n-1}$;

si $\hat{P}_z$ n'est pas vide, $\hat{P}_z$ est un polytope donc $\mathbb{1}_{\hat{P}_z} \in \mathcal{U}_{n-1}$. L'application linéaire $\begin{cases} \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_{n-1} \\ f \mapsto f_z \end{cases}$ envoie une famille génératrice de $\mathcal{U}_n$ dans $\mathcal{U}_{n-1}$ donc : $\boxed{\forall z \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{U}_n,\ f_z \in \mathcal{U}_{n-1}.}$

21. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{H}_n : \text{« } \chi_n \text{ défini une forme linéaire telle que pour tout polytope } P \text{ de } \mathbb{R}^n,\ \chi_n(P) = 1. \text{ »}$$

χ_1 est bien définie par 19 et linéaire et pour $a \leqslant b$ réels, $\chi_1(\mathbb{1}_{[a,b]}) = \mathbb{1}_{[a,b]}(b) - \lim\limits_{x \to b^+} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) = 1$ d'où $\mathcal{H}_1$.

Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{H}_{n-1}$. L'application $G : f \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto \chi_{n-1}(f_z) \end{cases}$ définie sur $\mathcal{U}_n$ est linéaire et bien définie par 20. Pour montrer la bonne définition de χ_n, il suffit de montrer que $G(\mathcal{U}_n) \subset \mathcal{U}_1$. Soit P un polytope de $\mathbb{R}^n$. On reprend les notations de 20. On pose $I_P = \{z \in \mathbb{R},\ \hat{P}_z \neq \varnothing\}$ et on remarque que par $\mathcal{H}_{n-1}$, $G(\mathbb{1}_P) = \mathbb{1}_{I_P}$. On définit $q : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n$ sur $\mathbb{R}^n$ et on remarque que $I_P = q(P)$ or q est linéaire continue et P est un compact convexe non vide donc I_P également or $I_P \subset \mathbb{R}$ donc I_P est un segment. Pour tout polytope P de $\mathbb{R}^n$, $G(P) \in \mathcal{U}_1$ donc par linéarité de G et définition de $\mathcal{U}_n$, $G(\mathcal{U}_n) \subset \mathcal{U}_1$. Ainsi $\chi_n = \chi_1 \circ G$ est une forme linéaire bien définie et pour tout polytope P de $\mathbb{R}^n$, $\chi_n(P) = \chi_1(\mathbb{1}_{I_P}) = 1$ d'après l'initialisation ce qui prouve $\mathcal{H}_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire inversible. Encore une fois, par linéarité de $f \mapsto \chi_n(f \circ A)$, il suffit de montrer que pour tout polytope P de $\mathbb{R}^n$, $\chi_n(\mathbb{1}_P \circ A) = \chi_n(\mathbb{1}_P)$ pour conclure. Soit P un tel polytope. $\mathbb{1}_P \circ A = \mathbb{1}_{A^{-1}(P)}$ or A^{-1} est continue et P est compact non vide donc $A^{-1}(P)$ également. Soit $(\ell_i)_{i \in I}$ une famille finie de formes linéaires et $(a_i)_{i \in I}$ de réels telles que $P = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in I,\ \ell_i(x) \leqslant a_i\}$. $A^{-1}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in I,\ \ell_i \circ A(x) \leqslant a_i\}$ or pour tout $i \in I$, $\ell_i \circ A$ est une forme linéaire donc $A^{-1}(P)$ est un polytope et ainsi $\chi_n(\mathbb{1}_P \circ A) = \chi_n(\mathbb{1}_{A^{-1}(P)}) = 1 = \chi_n(P)$.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \chi_n \text{ défini une forme linéaire sur } \mathbb{R}^n \text{ vérifiant pour tout polytope } P \text{ de } \mathbb{R}^n,\ \chi_n(P) = 1.}$

$\boxed{\text{Pour tout } A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ linéaire inversible et tout } f \in \mathcal{U}_n,\ \chi_n(f \circ A) = \chi_n(f).}$

22. Soit P un polytope. On a $S_P = \{i \in I,\ \forall x \in P,\ \ell_i(x) = a_i\}$ donc

$$P^\circ = \{x \in P,\ \forall i \in I,\ \ell_i(x) = a_i \iff i \in S_P\} = \{x \in P,\ \forall i \in I,\ \ell_i(x) = a_i \Rightarrow i \in S_P\}$$

Soit $x \in P \setminus P^\circ$. On peut trouver $i \in I$ tel que $\ell_i(x) = a_i$ et $i \notin S_p$ autrement ℓ_i n'est pas constante sur P. Ainsi $F = \{y \in P,\ \ell_i(y) = a_i\}$ est une face de P contenant x et $F \subsetneq P$.

$\boxed{\text{Pour tout polytope } P \text{ et pour tout } x \in P \setminus P^\circ, \text{ on peut trouver } F \text{ une face de } P \text{ telle que } x \in F \subsetneq P.}$

23. Pour tout $a < b$ réels, $\mathbb{1}_{]a,b[} = \mathbb{1}_{[a,b]} - \mathbb{1}_{[a]} - \mathbb{1}_{[b]} \in \mathcal{U}_1$ et $\chi_1(\mathbb{1}_{]a,b[}) = 1 - 1 - 1 = -1 = (-1)^{\dim([a,b])}$.

Soit $n \geqslant 2$. Supposons vérifié le résultat pour tous les polytopes de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Soit P un polytope de $\mathbb{R}^n$. Notons $(\ell_i)_{i \in I}$ ainsi que $(a_i)_{i \in I}$ les familles de formes linéaires et de réels tels que

$$P = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall i \in I, \ell_i(y) \leqslant a_i\}.$$

On pose $f = \mathbb{1}_{P^\circ}$.

Par compacité de P les réels suivants sont bien définis

$$z_1 = \max\{z \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in \mathbb{R}^{n-1}, (x, z) \in P\} \quad \text{et} \quad z_2 = \min\{z \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in \mathbb{R}^{n-1}, (x, z_2) \in P\}.$$

Si $z_1 = z_2$, P est inclus dans un hyperplan affine et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

On suppose donc désormais que $z_1 \neq z_2$.

- Montrons que $f \in \mathcal{U}_n$. On note $\mathcal{F}^*$ l'ensemble fini des faces de P distinctes de P. On a $P \setminus P^\circ = \bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}^*} F$ donc

$$\mathbb{1}_P - \mathbb{1}_{P^\circ} = \mathbb{1}_{\cup_{F \in \mathcal{F}^*} F} = 1 - \mathbb{1}_{\cap_{F \in \mathcal{F}^*} \mathbb{R}^n \setminus F} = 1 - \prod_{F \in \mathcal{F}^*} (1 - \mathbb{1}_F) = - \sum_{\substack{I \subset \mathcal{F}^* \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|} \mathbb{1}_{\cap_{F \in I} F}$$

Or toute face de P est un polytope et toute intersection de polytopes est vide ou est un polytope donc

$$f = \mathbb{1}_P + \sum_{\substack{I \subset \mathcal{F}^* \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|} \mathbb{1}_{\cap_{F \in I} F} \in \mathcal{U}_n.$$

• Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in P$. Par définition de z_1 et z_2 convexité de P,

$$\{t \in \mathbb{R},\ (x_1, z_1) + t((x_2, z_2) - (x_1, z_1)) \in P\} = [0, 1].$$

Par lemme Q13, on en déduit que (x_1, z_1) et (x_2, z_2) et appartiennent à des faces strictement incluses dans P et donc n'appartiennent pas à P°. Ce prouve en particulier que $f_{z_1} = f_{z_2} = 0$.

• Soit $z \in\,]z_1, z_2[$.

Notons

$$P_z = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, (x, z) \in P\} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, \forall i \in I, \ell_i(x, 0) \leqslant a_i - \ell_i(0, z)\}.$$

Alors, P_z est un polytope de $\mathbb{R}^{n-1}$ et, pour $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in P_z^\circ &\iff \forall i \in I, \quad \Big[\ell_i(x, 0) = a_i - \ell_i(0, z) \implies \forall x' \in P_z, \quad \ell_i(x', 0) = a_i - \ell_i(0, z)\Big] \\
&\iff \forall i \in I, \quad \Big[\ell_i(x, z) = a_i \implies \forall x' \in P_z, \quad \ell_i(x', z) = a_i\Big] \\
&\impliedby (x, z) \in P^\circ
\end{aligned}$$

Vérifions aussi l'implication directe.

Supposons par l'absurde que $x \in P_z^\circ$ et $(x, z) \in P \setminus \overset{\circ}{P}$. Alors on peut trouver $i \in I$ tel que $\ell_i(x, z) = a_i$ ainsi que $(x', z') \in P$ tel que

$$\ell_i(x', z') < a_i.$$

Si $z' = z$, alors $x' \in P_z$, ce qui contredit le fait que $x \in P_z^\circ$.

Donc $z' \neq z$, puis $z \in\,]z_1, z'[\quad$ ou $\quad z \in\,]z', z_2[\,$.

On peut donc trouver $t \in\,]0, 1[$ et $j \in \{1, 2\}$ tel que

$$z = tz' + (1 - t)z_j.$$

On fixe également $x_j \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $(x_j, z_j) \in P$.

Par convexité, $(tx' + (1 - t)x_j, z) = t(x', z') + (1 - t)(x_j, z_j) \in P \quad$ donc $\quad tx' + (1 - t)x_j \in P_z$

Or $t \neq 0$ donc $\ell_i(tx' + (1 - t)x_j, z) = t\ell_i(x', z') + (1 - t)\ell_i(x_j, z_j) < ta_i + (1 - t)a_i = a_i$ ce qui contredit le fait que $x \in P_z^\circ$ et prouve ainsi que $f_z = \mathbb{1}_{P_z^\circ}$.

• Quitte à translater P, on suppose que $0 \in P$ et que $z_1 = 0$. Soit $z \in]z_1, z_2[$. Montrons que

$$\dim(P_z) = \dim(P) - 1.$$

On considère B_z une base de $\overrightarrow{P_z}$ et on considère $B = \{(x, 0),\ x \in B_z\}$ libre dans $\overrightarrow{P}$. On fixe $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $(x, z_2) \in P$, on remarque que $(x, z_2) - 0 \in \overrightarrow{P}$ et $(x, z_2)_n \neq 0$ donc que $(x, z_2) \notin B$. Ainsi $B \cup \{(x, z_2)\}$ est libre dans $\overrightarrow{P}$ donc $\dim(P) \geqslant |B| + 1 \geqslant \dim(P_z) + 1$ et ainsi $\dim(P_z) \leqslant \dim(P) - 1$.

On définit $p : (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{n-1})$ et $q : (x_1, \ldots, x_n) \to x_n$ sur $\mathbb{R}^n$ et on fixe $x \in P$ tel que $q(x) = z_2$. On a $\overrightarrow{P} = \mathrm{Vect}(P)$ car $0 \in P$ or $x \neq 0$ donc on peut compléter (x) par $(x_1, \ldots, x_m) \in P^m$ en base B de $\overrightarrow{P}$.

Soit $i \in [\![1, m]\!]$. $q(tx + (1 - t)x_i) \to q(x) = z_2 > z$ quand $t \to 1^-$ donc on peut trouver $t_i \in]0, 1[$ tel que $q(t_i x + (1 - t_i)x_i) > z$ et il est ainsi possible de supposer, quitte à effectuer des opérations élémentaires, que $q(x_i) > z$. En particulier (rappelons que $z_1 = 0$) $q(x_i) \neq 0$ et $\dfrac{z}{q(x_i)} \in [0, 1]$.

Par convexité de P, $y = \dfrac{z}{q(x)}x + \left(1 - \dfrac{z}{q(x)}\right)0 \in P$ et $y_i = \dfrac{z}{q(x_i)}x_i + \left(1 - \dfrac{z}{q(x_i)}\right)0 \in P$ or $q(y) = z$ et $q(y_i) = z$ donc $p(y) \in P_z$ et $p(y_i) \in P_z$. Montrons que $(p(y_1) - p(y), \dots, p(y_m) - p(y))$ est libre pour en déduire que $\dim(P_z) \geqslant m = \dim(P) - 1$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(p(y_i) - p(y)) = 0$. Par suite $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(y_i - y) = 0$ puis $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} z\frac{\lambda_i}{q(x_i)}x_i - \frac{z}{q(z)}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x = 0$ donc par liberté de B et non nullité de z, $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Par double inégalité $\dim(P_z) = \dim(P) - 1$.

- Pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus [z_1, z_2]$, $f_z = \mathbb{1}_\varnothing = 0$. Ainsi on a prouvé que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $f_z = \mathbb{1}_{]z_1,z_2[}(z)\mathbb{1}_{P_z^\circ}$

En notant $g : z \mapsto \chi_{n-1}(f_z)$, par hypothèse de récurrence et ce qui précède

$$g(z) = \mathbb{1}_{]z_1,z_2[}(z)(-1)^{\dim(P_z)} = \mathbb{1}_{]z_1,z_2[}(z)(-1)^{\dim(P)-1}$$

$$\text{donc} \quad \chi_n(f) = \chi_1(g) = (-1)^{\dim P - 1}\chi_1(\mathbb{1}_{]z_1,z_2[}) = (-1)^{\dim P}.$$

$\boxed{\text{Pour tout polytope } P \text{ de } \mathbb{R}^n,\ \mathbb{1}_{P^\circ} \in \mathcal{U}_n \text{ et } \chi_n(\mathbb{1}_{P^\circ}) = (-1)^{\dim(P)}.}$

24. On note $\mathcal{F}_P$ l'ensemble fini des faces de P. En appliquant 22 aux faces de P, on constate que tout point de P appartient à l'intérieur relatif d'une face. L'autre inclusion étant claire : $P = \displaystyle\bigcup_{F \in \mathcal{F}_P} F^\circ$. Cette union est disjointe. En effet considérons $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_P$, si on peut trouver $x \in F_1^\circ \cap F_2^\circ$ alors $S_{F_1} = S_{F_2}$ puis $F_1 = F_{S_{F_1}} = F_{S_{F_2}} = F_2$. Ainsi $\mathbb{1}_P = \displaystyle\sum_{F \in \mathcal{F}_P} \mathbb{1}_{F^\circ}$ puis par 23, $1 = \chi_n(\mathbb{1}_P) = \displaystyle\sum_{F \in \mathcal{F}_P} \chi_n(\mathbb{1}_{F^\circ}) = \sum_{F \in \mathcal{F}_P} (-1)^{\dim(F)}$.

$\boxed{\sum (-1)^{\dim(F)} = 1 \text{ où } F \text{ parcourt les faces de } P.}$

2.3 Triangulations

Quitte à travailler dans l'espace affine contenant P, et quitte à translater, on peut supposer que P est un polytope de dimension $n > 0$ et que $0 \in P^\circ$.

On considère une famille $(\ell_i)_{i \in I}$ de formes linéaires et $(a_i)_{i \in I}$ de réels telles que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in I,\ \ell_i(x) \leqslant a_i\}.$$

Enfin, quitte à retirer les formes linéaires superflues, on suppose $(\ell_i)_{i \in I}$ minimale :

$$\forall i \in I,\ P \subsetneq \{x \in \mathbb{R}^n,\ \forall j \in I \setminus \{i\},\ \ell_j(x) \leqslant a_j\}.$$

25. P n'a qu'un nombre fini de faces. Les faces de P sont des polytopes, L'intersection de deux faces de P est soit vide soit une face de P. Toute face de P est face de toute face de P la contenant. Il reste à montrer que P admet au moins une face de dimension $n - 1$ pour conclure.

    Soit $i_0 \in I$. On peut trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i \in I \setminus \{i_0\}$, $\ell_i(x) \leqslant a_i$ et tel que $\ell_{i_0}(x) > a_{i_0}$.

    P n'est pas contenu dans l'hyperplan affine $(\ell_{i_0} = a_{i_0})$ et $0 \in P^\circ$ donc $a_{i_0} > 0$.

    On pose $Q = \{y \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in I \setminus \{i_0\},\ \ell_i(y) \leqslant a_i \text{ et } \ell_{i_0}(y) \leqslant \ell_{i_0}(x)\}$. Q est fermé, non vide car contenant 0, borné car $\lambda = \frac{a_{i_0}}{\ell_{i_0}(x)} \in]0, 1[$ et $\lambda Q \subset P$. Ainsi Q est un polytope de $\mathbb{R}^n$, de dimension n car contenant P.

    $[0, \ell_{i_0}(x)] \subset \ell_{i_0}(Q)$ donc (voir le calcul de la dimension dans la Q23) pour tout $z \in]0, \ell_{i_0}(x)[$,

    $\{y \in Q,\ \ell_{i_0}(y) = z\}$ est de dimension $n - 1$ or $a_{i_0} \in]0, \ell_{i_0}(x)[$ donc

    $$F_{i_0} = \{y \in P,\ \ell_{i_0}(y) = a_{i_0}\} = \{y \in Q,\ \ell_{i_0}(y) = a_{i_0}\}$$

    est une face de P de dimension $n - 1$.

    $\boxed{\text{L'ensemble des faces de } P \text{ de dimension } n-1 \text{ est un complexe.}}$

26. De ce qui précède $\mathcal{F} = \{F_i,\ i \in I\}$ est l'ensemble des faces de P de dimension $n-1$.

Quitte à considérer les formes linéaires $\left(\frac{\ell_i}{a_i - \ell_i(x)}\right)_{i\in I}$: $x = 0$ et pour tout $i \in I$, $a_i = 1$.

• Soit $i \in I$ et V_i l'ensemble des sommets du polytope F_i. On a $F_i = \mathrm{Conv}(V_i)$ donc

$$F_{i,0} = \mathrm{Conv}(F_i \cup \{0\}) = \mathrm{Conv}(V_i \cup \{0\})$$

est, par Q17, un polytope.

• Soit $i \neq j \in I$ et $\ell = \ell_j - \ell_i$. Soit $y \in F_{i,0}$.

On peut trouver $x_1, \dots, x_m \in F_i$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^+$ de somme au plus 1 tels que $y = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$.

On a $\ell_j(y) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \ell_j(x_k) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_k \ell_i(x_k) = \ell_i(y)$ et

$$\ell_j(y) = \ell_i(y) \iff \forall k \in [\![1, m]\!],\ \lambda_k \neq 0 \Rightarrow \ell_j(x_k) = \ell_i(x_k).$$

Ainsi $F_{i,0} \subset (\ell \leqslant 0)$ et $F_{i,0} \cap (\ell = 0) \subset F_{j,0}$. De même on montre que $F_{j,0} \subset (-\ell \leqslant 0)$ donc que $F_{i,0} \cap F_{j,0} \subset (\ell = 0)$. En conclusion $F_{i,0} = F_{i,0} \cap (\ell \leqslant 0)$, $F_{j,0} = F_{j,0} \cap (-\ell \leqslant 0)$ et $F_{i,0} \cap F_{j,0} = F_{i,0} \cap (\ell = 0) = F_{j,0} \cap (-\ell = 0)$ est bien une face de $F_{i,0}$ et de $F_{j,0}$.

• Par convexité de P, pour tout $i \in I$, $F_{i,0} \subset P$. De plus, comme $\mathcal{F} = \{F_i,\ i \in I\}$, toute face de P est contenue dans une face de dimension $n-1$.

Soit $y \in P \setminus \{0\}$. Du lemme Q13 on peut trouver $t \geqslant 1$ tel que ty appartiennent à une face de P donc on peut trouver $i \in I$ tel que $ty \in F_i$ et ainsi $y \in [0, ty] \in F_{i,0}$ donc la réalisation du complexe est bien égale à P.

27. • On injecte $\mathbb{R}^n$, sans changer la notation des éléments, via $x \mapsto (x, 0)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $x_{n+1} \neq 0$. Soit S un simplexe de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k \geqslant 0$ et V l'ensemble des sommets de S : $S = \mathrm{Conv}(V)$ et $|V| = k+1$. Par suite $S_x = \mathrm{Conv}(S \cup \{x\}) = \mathrm{Conv}(V \cup \{x\})$ est un polytope. Soit $v \in V$: $x - v \notin \overrightarrow{V}$ donc $\dim(S_x) \geqslant \dim(V) + 1 = k+1$. De plus par Q18 l'ensemble des sommets V_x de S_x est inclus dans $V \cup \{x\}$ or $S_x = \mathrm{Conv}(V_x)$ donc $\dim(S_x) \leqslant |V_x| - 1 \leqslant |V \cup \{x\}| - 1 = k+1$. Ainsi $\dim(S_x) = k+1$ et S_x a pour ensemble de sommets $V \cup \{x\}$ de cardinal $k+2$. Autrement dit S_x est un simplexe de dimension $k+1$.

• On appelle triangulation d'un complexe $\mathcal{C}$ tout complexe formé de simplexes contenant une triangulation de chaque polytope du complexe $\mathcal{C}$.

Hypothèse de récurrence. Tout complexe de $\mathbb{R}^n$ dont les polytopes sont de dimension k admet une triangulation.

Initialisation. Tout complexe de dimension 0 ou 1 est déjà une triangulation de lui même.

Hérédité. Soit $k \geqslant 2$. Supposons le résultat vérifié au rang $k-1$.

Soit $\mathcal{C}$ un complexe de $\mathbb{R}^n$ dont les polytopes sont de dimension k.

On note $\mathcal{C}'$ l'ensemble constitué des faces de dimension $k-1$ de chaque polytope de $\mathcal{C}$.

Soit $P', Q' \in \mathcal{C}'$. On se donne $P, Q \in \mathcal{C}$ tel que P' soit une face de P et Q' une face de Q.

On note

$$P = \bigcap_{i\in I} (\ell_i \leqslant a_i) \quad \text{et} \quad Q = \bigcap_{j\in J} (m_j \leqslant b_j).$$

On peut trouver $I' \subset I$, $J' \subset J$ tel que

$$P' = P \cap \bigcap_{i\in I'} (\ell_i = a_i) \quad \text{et} \quad Q' = Q \cap \bigcap_{j\in J'} (m_j = b_j).$$

On a

$$P \cap Q = \bigcap_{i\in I} (\ell_i \leqslant a_i) \cap \bigcap_{j\in J} (m_j \leqslant b_j)$$

qui est une face de P car $\mathcal{C}$ est un complexe.

Donc $P \cap Q' = P \cap Q \cap \bigcap_{j \in J'} (m_j = b_j)$

est une face de $P \cap Q$ donc de P puis

$$P' \cap Q' = P \cap Q' \cap \bigcap_{i \in I'} (\ell_i = a_i)$$

est une face de P incluse dans P' donc une face de P'. $P' \cap Q'$ est également une face de Q'.

Ainsi, $\mathcal{C}'$ est un complexe auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. On triangule $\mathcal{C}'$.

Pour chaque P dans $\mathcal{C}$, on se donne $x_P \in \overset{\circ}{P}$, on note $\mathcal{F}_{P,k-1}$ l'ensemble des faces de P de dimension $k-1$. Pour tout $F \in \mathcal{F}_{P,k-1}$, on note T_F la triangulation de F dans $\mathcal{C}'$ et $T_{F,x_P} = \{\mathrm{Conv}(S \cup \{x_P\}),\ S \in T_F\}$. Du premier point, tout élément de T_{F,x_P} est un simplexe.

Montrer que $T = \bigcup_{\substack{P \in \mathcal{C} \\ F \in \mathcal{F}_{P,k-1}}} T_{F,x_P}$ est une triangulation de $\mathcal{C}$.

Soit S_1 et S_2 deux simplexes de T d'intersection non vide.

Notons P_1 et P_2 ainsi que F_1 et F_2 les polytopes et faces associées.

Si $P_1 = P_2$ et $F_1 = F_2$, alors S_1 et S_2 appartiennent à la triangulation T_{F,x_P} avec $F = F_1$ et $P = P_1$ donc $S_1 \cap S_2$ est une face de S_1 et S_2.

Si $P_1 = P_2$ noté P et $F_1 \neq F_2$, on peut fixer deux simplexes S_1' et S_2' de $\mathcal{C}'$ respectivement dans F_1 et F_2 tels que

$$S_1 = \mathrm{Conv}(S_1' \cup \{x_P\}) \quad \text{et} \quad S_2 = \mathrm{Conv}(S_2' \cup \{x_P\})$$

Dans la suite, on notera

$$P = \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell_i(x) \leqslant a_i\}.$$

Montrons que

$$S_1 \cap S_2 = \mathrm{Conv}((S_1' \cap S_2') \cup \{x_P\}).$$

L'inclusion réciproque est évidente.

Soit $y \in S_1 \cap S_2 \setminus \{x_P\}$.

Montrons qu'il existe un unique $t > 0$ tel que $x_P + t(y - x_P) \in P \setminus P^\circ$. Par lemme Q13 on a déjà l'existence d'un réel $t > 0$ tel que $z = x_P + t(y - x_P) \in P \setminus P^\circ$. On peut donc trouver $i \in I$ tel que $\ell_i(z) = a_i$ et $\ell_i(x_P) < a_i$. Par suite $\ell_i(y - x_P) > 0$ puis pour tout $\varepsilon > 0$, $\ell_i(z + \varepsilon(y - x_P)) > a_i$ donc $x_P + (t + \varepsilon)(y - x_P) \notin P$ ce qui prouve l'unicité du réel t.

Comme $y \neq x_P$, par convexité de S_1 et S_2, on peut trouver $\alpha, \beta \in [0, 1[$ et $s_1 \in S_1'$, $s_2 \in S_2'$ tels que $y = \alpha x_P + (1 - \alpha) s_1 = \beta x_P + (1 - \beta) s_2$.

Par suite $x_P + (1-\alpha)^{-1}(y - x_P) = s_1 \in S_1' \subset F_1 \subset P \setminus P^\circ$ donc $(1-\alpha)^{-1} = t$. De même $(1-\beta)^{-1} = t$ donc $\alpha = \beta$ et ainsi $s_1 = s_2 \in S_1' \cap S_2'$ puis $y = \alpha x_P + (1 - \alpha) s_1 \in \mathrm{Conv}((S_1' \cap S_2') \cup \{x_P\})$.

On a donc

$$S_1 \cap S_2 = \mathrm{Conv}((S_1' \cap S_2') \cup \{x\}).$$

Les simplexes S_1' et S_2' sont dans une triangulation donc leur intersection est une face de S_1'

Il existe donc V_1 une partie des sommets de S_1' tels que $S_1' \cap S_2' = \mathrm{Conv}(V_1)$ de sorte que $S_1 \cap S_2 = \mathrm{Conv}(V_1 \cup \{x\})$. Or $V_1 \cup \{x\}$ est une partie des sommets de S_1 et S_1 est un simplexe donc $S_1 \cap S_2$ est une face de S_1. *On admet que toute enveloppe convexe d'une partie des sommets d'un simplexe est une face de ce simplexe.*

De même, $S_1 \cap S_2$ est une face de S_2.

Si $P_1 \neq P_2$, on a, en reprenant les notations précédentes

$$P_1^\circ \cap P_2^\circ = \varnothing, \quad S_1 \setminus S_1' \subset P_1^\circ \quad \text{et} \quad S_2 \setminus S_2' \subset P_2^\circ.$$

On en déduit $S_1 \cap S_2 = S_1' \cap S_2'$ donc $S_1 \cap S_2$ est une face de S_1' (et S_2'), donc une face de S_1 (et S_2).

28. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des faces de $\mathcal{C}$. Pour tout $P \in \mathcal{C}$, toute face de P est face de $\mathcal{C}$ et P est la réunion de l'intérieur de ses faces donc $|\mathcal{C}| = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^\circ$.

    Montrons que cette union est disjointe. Soit F_1 et F_2 des faces distinctes de $\mathcal{C}$ associées aux polytopes P_1, P_2. $P_1 \cap P_2$ est une face de P_1 et P_2 donc comme montré dans la question précédente, $F_1 \cap F_2$ est une face de F_1 distincte de F_1 donc $F_1 \cap F_2 \cap F_1^\circ = \varnothing$ et ainsi $F_1^\circ \cap F_2^\circ = \varnothing$.

    Par suite $\sum_{F \in \mathcal{F}} (-1)^{\dim(F)} = \chi\left(\sum_{F \in \mathcal{F}} \mathbb{1}_{F^\circ}\right) = \chi(\mathbb{1}_{|\mathcal{C}|})$ or $|\mathcal{C}|$ est convexe donc est l'enveloppe convexe des sommets des polytopes de $\mathcal{C}$ donc $|\mathcal{C}|$ est un polytope et ainsi $\chi(\mathbb{1}_{|\mathcal{C}|}) = 1$. $\boxed{\chi(\mathbb{1}_{\mathcal{C}}) = 1.}$

3 Le polytope de Birkhoff

29. Les applications

$$M \mapsto -M_{i,j}, \quad M \mapsto \pm \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} \quad \text{et} \quad M \mapsto \pm \sum_{k=1}^{n} M_{k,j}$$

sont des formes linéaires.

Comme image réciproque d'un fermé par une application continue, B_n est fermé.

Par ailleurs, on a

$$\forall M \in B_n, \quad \|M\|_\infty \leqslant 1$$

donc B_n est borné.

Fermé et borné dans $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, B_n est un compact, non vide car $I_n \in B_n$.

En conclusion, B_n est un polytope.

Toutes les matrices A différences de deux matrices bistochastiques vérifient

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} = 0.$$

Il en est de même pour toutes les combinaisons linéaires de ces matrices.

Notons F le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices A vérifiant les conditions précédentes ainsi que $f : F \to M_{n-1}(\mathbb{R})$ l'application qui à $A = \begin{pmatrix} B & C \\ L & \lambda \end{pmatrix} \in F$ associe le bloc $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ est bien définie et linéaire.

Si $A \in \operatorname{Ker} f$, alors A est sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & C \\ L & \lambda \end{pmatrix}.$$

Comme la somme des lignes et des colonnes de A est nulle, on en déduit $C = 0$ et $L = 0$, puis $\lambda = 0$. Ainsi, f est injective.

Soit $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. On définit la colonne C et la ligne L par

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!], \quad C_{i,1} = -\sum_{k=1}^{n-1} B_{i,k} \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1,n-1]\!], \quad L_{1,j} = -\sum_{k=1}^{n-1} B_{k,j}.$$

On pose également

$$\lambda = -\sum_{i=1}^{n-1} C_{i,1} \quad \text{puis} \quad A = \begin{pmatrix} B & C \\ L & \lambda \end{pmatrix}.$$

Par construction, la somme de chaque colonne de A est nulle, donc la somme des coefficients de A est nulle. Or, la somme des coefficients des $n-1$ premières lignes est nulle, donc la somme des coefficients de la dernière ligne est nulle.

Finalement, $A \in F$, puis f permet de définir un isomorphisme de F sur $M_{n-1}(\mathbb{R})$ et la famille

$$(E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$$

est une base de F.

On adopte les notations de la question suivante (définition des matrices de permutation P^σ) et, de façon immédiate, on a

$$\forall \sigma \in S_n, \quad P_\sigma \in B_n.$$

Soit $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$. Comme i et n sont distincts ainsi que j et n, on peut trouver une permutation $\sigma \in S_n$ telle que

$$\sigma(i) = j \quad \text{et} \quad \sigma(n) = n.$$

On note $\tau \in S_n$ la transposition (i, n) puis $\sigma' \in S_n$ défini par $\sigma' = \sigma \circ \tau$, de sorte que

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i, n\}, \quad \sigma'(k) = \sigma(k), \quad \sigma'(i) = n \quad \text{et} \quad \sigma'(n) = j.$$

On a alors

$$\underbrace{P^\sigma}_{\in B_n} - \underbrace{P^{\sigma'}}_{\in B_n} = E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n} \quad \text{donc} \quad F \subset \mathrm{Vect}(B_n - B_n) = \overrightarrow{B_n}.$$

Ceci achève de montrer que

$$\overrightarrow{B_n} = F \quad \text{donc} \quad \dim B_n = \dim F = (n-1)^2.$$

30. Soit $\sigma \in S_n$. La matrice P^σ est l'unique matrice de B_n vérifiant

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \sigma(i) \neq j \implies -M_{i,j} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} = 1,$$

ce qui montre que $\{P^\sigma\}$ est une face de B_n, de dimension 0, donc un sommet de B_n.

31. On observe que tous les coefficients de M sont dans $[0, 1]$. Notons :

$$X = \{(i,j) \in [\![1, n]\!]^2 / M_{i,j} \in]0, 1[\,\}$$

L'ensemble X est non vide puisque $M \in B_n \setminus M_n(\mathbb{Z})$.

- premier point : soit $(r, s) \in X$
  - supposons que
    $$\forall k \in [\![1, n]\!] \setminus \{s\}, \quad M_{r,k} = 0.$$
    Alors on aurait $\sum\limits_{k=1}^{n} M_{r,k} = M_{r,s} \neq 1$, absurde.

    On peut donc choisir $s' \neq s$ tel que $M_{r,s'} > 0$.
  - supposons qu'on ait $M_{r,s'} = 1$. Alors on aurait $\sum\limits_{k=1}^{n} M_{r,k} \geqslant M_{r,s} + M_{r,s'} > 1$, absurde. Donc on a $M_{r,s'} \in]0, 1[$.
  - on construit ainsi une fonction $h : (r, s) \mapsto (r, s')$ (comme "horizontal") de X dans X.
  - Symétriquement, on construit une fonction $v : (r, s) \mapsto (r', s)$ (comme "vertical"), qui à tout couple $(r, s) \in X$ associe un couple $(r', s) \in X$ avec $r' \neq r$.
- On considère $(a_1, b_1) \in X$ et on lui applique successivement h et v pour obtenir une suite $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $X^{\mathbb{N}^*}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = a_{2n+2} \neq a_{2n+3}$ et $b_{2n+1} \neq b_{2n+2} = b_{2n+3}$.

  X étant fini, il existe des entiers $m < n$ tels que $(a_m, b_m) = (a_n, b_n)$ et quitte à considérer le rang suivant, m est impair.

  On peut donc trouver une famille $c = (a_k, b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de X de cardinal minimal telle que $c_1 = c_n$ et :

— pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, si k est impair alors $a_k = a_{k+1}$ et $b_k \neq b_{k+1}$ et si k est pair alors $a_k \neq a_{k+1}$ et $b_k = b_{k+1}$.

— les éléments de $(c_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont deux à deux distincts.

Par construction $n \geqslant 5$. Supposons par l'absurde que n est pair. On a donc $n \geqslant 6$, $a_{n-4} \neq a_{n-3} = a_{n-2} \neq a_{n-1} = a_n = a_1$ et $b_{n-4} = b_{n-3} \neq b_{n-2} = b_{n-1} \neq b_n = b_1$. Si $b_{n-3} \neq b_1$, la famille $(c_1, \ldots, c_{n-3}, (a_{n-2}, b_1), (a_1, b_1))$ contredit la minimalité de c. Si $b_{n-3} = b_1$, comme $b_{n-4} = b_1$, par minimalité de c, $a_{n-4} \neq a_1$ puis la famille $(c_1, \ldots, c_{n-4}, (a_1, b_1))$ contredit la minimalité de c.

Ainsi n est impair et on renomme c en $((r_1, s_1), (r_1, s_2), \ldots, (r_{k-1}, s_{k-1}), (r_{k-1}, s_k), (r_k, s_k))$ qui convient. Enfin on remarque qu'on pourrait raccourcir la chaîne s'il existe $i \in [\![2, k-1]\!]$ tel que $s_i = s_1$. Ainsi (utilisé dans la question suivante) $s_1, \ldots, s_{k-1}$ sont deux à deux distincts.

32. Soit $M \in B_n \setminus M_n(\mathbb{Z})$. On reprend les notations de la question précédente.

Notons Q la matrice définie par

$$\forall i \in [\![1, k-1]\!], \quad Q_{r_i, s_i} = 1, \quad Q_{r_i, s_{i+1}} = -1$$

et $Q_{i,j} = 0$ sinon.

La matrice Q est bien définie car les couples

$$(r_1, s_1), (r_1, s_2), \ldots, (r_{k-1}, s_k)$$

sont distincts deux à deux, et non nulle car $k - 1 \geqslant 1$.

Par construction, la somme des coefficients d'une ligne quelconque de Q vaut 0.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Si j est de la forme

$$j = s_i \quad \text{pour} \quad i \in [\![2, k]\!],$$

alors les deux seuls coefficients non nuls de la j-ème colonne de Q sont ceux des lignes r_{i-1} et r_i, qui valent respectivement -1 et 1.

Si j n'est pas de cette forme, $C_j(Q) = 0$.

Dans tous les cas, la somme des coefficients d'une colonne quelconque de Q vaut 0.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \sum_{k=1}^{n} (M_{i,k} + tQ_{i,k}) = \sum_{k=1}^{n} (M_{k,j} + tQ_{k,j}) = 1.$$

Soit $i \in [\![1, k-1]\!]$. Alors on a

$$M_{r_i, s_i} + tQ_{r_i, s_i} \xrightarrow[t \to 0]{} M_{r_i, s_i} > 0 \quad \text{et} \quad M_{r_i, s_{i+1}} + tQ_{r_i, s_{i+1}} \xrightarrow[t \to 0]{} M_{r_i, s_{i+1}} > 0.$$

On peut donc fixer $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad \forall i \in [\![1, k-1]\!], \quad M_{r_i, s_i} + tQ_{r_i, s_i} > 0 \quad \text{et} \quad M_{r_i, s_{i+1}} + tQ_{r_i, s_{i+1}} > 0.$$

Si le couple $(\ell, j) \in [\![1, n]\!]^2$ n'est pas de la forme (r_i, s_i) ou (r_i, s_{i+1}), on a aussi

$$\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad M_{\ell,j} + tQ_{\ell,j} = M_{\ell,j} \geqslant 0.$$

Ainsi,

$$\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad M + tQ \in B_n.$$

Par l'absurde, supposons que M soit un sommet de B_n. On reprend les notations du début de la partie 2 et l'on se donne $(\ell_i)_{i \in I}$ et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de formes linéaires et de réels tel que

$$B_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \forall i \in I, \quad \ell_i(A) \leqslant a_i\}.$$

Par définition, $\{M\}$ est une face de B_n et l'on peut fixer J non vide inclus dans I tel que

$$\forall A \in B_n, \quad A = M \iff \forall j \in J, \quad \ell_j(A) = a_j.$$

On a $M + \varepsilon Q \in B_n$ et $M + \varepsilon Q \neq 0$ donc on peut trouver $k \in J$ tel que

$$\ell_k(M + \varepsilon Q) < a_k = \ell_k(M) \quad \text{donc} \quad \ell_k(Q) < 0.$$

On a alors

$$\ell_k(M - \varepsilon Q) = a_k - \varepsilon \ell_k(Q) > a_k,$$

ce qui est absurde car $M - \varepsilon Q \in B_n$.

Condition nécessaire. Soit $M \in B_n$ un sommet de B_n. Alors, par ce qui précède, M est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$, tous positifs ou nuls, dont la somme des lignes et des colonnes vaut 1.

On en déduit que chaque coefficient de M vaut 0 ou 1 avec exactement un seul 1 par ligne et par colonne.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $\sigma(i)$ l'unique $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $M_{i,j} = 1$, ce qui permet de définir une application σ de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même, injective (pas plus d'un seul 1 par colonne) donc bijective. On dispose donc de $\sigma \in S_n$ tel que

$$M = P^\sigma.$$

4 Développement des fractions rationnelles

33. **Première inclusion stricte.** Soit $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x^k$ la fonction constante égale à 1 et $P = 1 - x$. Pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}$, on a

$$(Pf)(\gamma) = \sum_{\alpha + \beta = \gamma} f(\alpha) P(\beta) = P(0) + P(1) = 1 - 1 = 0.$$

Donc $f \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$.

Remarque. La relation $Pf = 0$ correspond au calcul formel télescopique

$$(1 - x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} x^k = 0.$$

Deuxième inclusion stricte. La fonction $1 = x^0$ est rationnelle ($P = 1$ convient) et n'est pas de torsion sinon cela contredirait le caractère intègre de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$.

Troisième inclusion stricte. On pose

$$f = \sum_{\gamma=0}^{+\infty} \frac{1}{\gamma!} x^\gamma.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $P, Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ tels que

$$Pf = Q.$$

Quitte à multiplier de chaque côté par x^β avec β suffisamment grand, on peut supposer sans perte de généralité que P et Q s'écrivent sous la forme

$$P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j x^j$$

La relation

$$\forall \gamma \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{\gamma} \frac{1}{k!} a_{\gamma - k} = b_\gamma$$

nous indique que le produit de Cauchy des séries entières $\sum \frac{1}{k!} z^n$ et $\sum a_n z^n$ est la série entière $\sum b_n z^n$.

Chacune de ces séries entières est de rayon de convergence infini, donc sur $\mathbb{C}$ (le disque ouvert de convergence), on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ n'est pas le polynôme nul, on en déduit, après simplification par le pgcd, l'existence d'une fraction irréductible $\dfrac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad B(z) \neq 0 \implies e^z = \frac{A(z)}{B(z)}.$$

Par irréductibilité, A et B n'ont pas de racine en commun, donc, par le théorème de d'Alembert-Gauss, A est un polynôme constant non nul. On note $\lambda \in \mathbb{C}^*$ cette constante.

Par continuité, on en déduit

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad B(z)e^z = \lambda$$

donc B est également un polynôme constant non nul, puis la fonction exponentielle complexe est constante non nulle : absurde.

34. **Bonne définition.** Soit $P, Q, R, S \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ tels que

$$Pf = Q, \quad Rf = S \quad \text{et} \quad P, R \neq 0.$$

On a alors

$$RPf = RQ \quad \text{et} \quad PRf = PS \quad \text{donc} \quad RQ = PS \quad \text{puis} \quad \frac{Q}{P} = \frac{S}{R}.$$

Linéarité. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $f, g \in \mathcal{R}$ ainsi que $P, Q, R, S \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ tel que

$$Pf = Q, \quad Rg = S \quad \text{et} \quad P, R \neq 0.$$

On a alors

$$PR(\lambda f + g) = \lambda RQ + PS \quad \text{donc} \quad I(\lambda f + g) = \frac{\lambda RQ + PS}{PR} = \lambda \frac{Q}{P} + \frac{S}{R} = \lambda I(f) + I(g).$$

Noyau. Supposons que $f \in \mathcal{T}$ et fixons $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ tel que $Pf = 0$ avec $P \neq 0$. On a alors

$$I(f) = \frac{0}{P} = 0 \quad \text{donc} \quad f \in \operatorname{Ker} I.$$

Soit $f \in \operatorname{Ker} I$. Comme $f \in \mathcal{R}$, on peut trouver $P, Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ tel que $Pf = Q$ avec $P \neq 0$. Comme $I(f) = 0$, on a

$$\frac{P}{Q} = 0 \quad \text{donc} \quad Q = 0,$$

ce qui montre que $f \in \mathcal{T}$.

Relation. Soit $P \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] \setminus \{0\}$ et $f \in \mathcal{R}$. Fixons $Q, R \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ tel que $Qf = R$ avec $Q \neq 0$.

On a alors

$$QPf = PQf = PR \quad \text{donc} \quad I(Pf) = \frac{PR}{Q} = P\frac{R}{Q} = PI(f).$$

Si $P = 0$, la relation précédente se réécrit $0 = 0$.

35. **Analyse (unicité).** Soit s_u qui convient.

Soit $f \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ puis $P, Q \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ tel que $Q \neq 0$ et $f = \dfrac{P}{Q}$. On note

$$Q = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} q_\gamma x^\gamma \quad \text{et} \quad A = \{u(\gamma) \,|\, \gamma \in \mathbb{Z}^n \quad \text{et} \quad q_\gamma \neq 0\}.$$

Comme Q est non nul, A est fini non vide et l'on peut fixer $\beta \in \mathbb{Z}^n$ tel que $u(\beta) = \min A$. Comme u est un morphisme de groupes injectif, on a

$$\forall \gamma \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\beta\}, \quad q_\gamma \neq 0 \implies u(\gamma - \beta) = u(\gamma) - u(\beta) > 0.$$

On calcule dans $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$:

$$f = \frac{P}{Q} = \frac{q_\beta^{-1} x^{-\beta} P}{1 + \sum\limits_{\gamma \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\beta\}} \dfrac{q_\gamma}{q_\beta} x^{\gamma - \beta}}$$

Par le deuxième et le troisième axiome, on en déduit

$$\begin{aligned} s_u(f) &= q_\beta^{-1} x^{-\beta} P I\Bigg(\frac{1}{1 + \sum\limits_{\gamma \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\beta\}} \dfrac{q_\gamma}{q_\beta} x^{\gamma - \beta}}\Bigg) \\ &= q_\beta^{-1} x^{-\beta} \sum_{n \in \mathbb{N}} (-g)^n \quad \text{avec} \quad g = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\beta\}} \frac{q_\gamma}{q_\beta} x^{\gamma - \beta}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de l'unicité.

Existence. Soit $f \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$. Soit $P, Q, R, S \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ tel que

$$f = \frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \quad \text{avec} \quad Q, S \neq 0.$$

On reprend les notations précédentes :

$$\frac{q_\beta^{-1} x^{-\beta} P}{\underbrace{1 + \sum\limits_{\gamma \neq \beta} \dfrac{q_\gamma}{q_\beta} x^{\gamma - \beta}}_{=g}} = \frac{s_{\beta'}^{-1} x^{-\beta'} R}{\underbrace{1 + \sum\limits_{\gamma \neq \beta'} \dfrac{s_\beta}{s'_\beta} x^{\beta - \beta'}}_{=h}} \quad \text{donc} \quad (1+h) q_\beta^{-1} x^{-\beta} P = (1+g) s_{\beta'}^{-1} x^{-\beta'} R$$

On multiplie de part et d'autre par $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (-g)^n \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (-h)^n$ pour obtenir

$$q_\beta^{-1} x^{-\beta} P \sum_{n \in \mathbb{N}} (-g)^n = s_{\beta'}^{-1} x^{-\beta'} R \sum_{n \in \mathbb{N}} (-h)^n$$

Enfin, on a

$$(1+g) q_\beta^{-1} x^{-\beta} P \sum_{n \in \mathbb{N}} (-g)^n = q_\beta^{-1} x^{-\beta} \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] \quad \text{avec} \quad 1 + g \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] \setminus \{0\}.$$

Cela permet de définir une application s_u de $\mathbb{C}(\mathbb{Z}^n)$ dans $\mathcal{R}$ en posant

$$s_u(f) = q_\beta^{-1} x^{-\beta} P \sum_{n \in \mathbb{N}} (-g)^n.$$

De la relation $(1+g)s_u(f) = q_\beta^{-1}x^{-\beta}P$ on déduit $I(s_u(f)) = \frac{q_\beta^{-1}x^{-\beta}P}{1+g}$ **direct non ?**

$$(1+g)I(s_u(f)) = I((1+g)s_u(f)) = I(q_\beta^{-1}x^{-\beta}P) = \frac{q_\beta^{-1}x^{-\beta}P}{1} = q_\beta^{-1}x^{-\beta}P.$$

On en déduit

$$I(s_u(f)) = \frac{q_\beta^{-1}x^{-\beta}P}{1+g} = \frac{P}{Q} = f.$$

Soit $R \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$. On a

$$s_u(Rf) = s_u\Big(\frac{RP}{Q}\Big) = q_\beta^{-1}x^{-\beta}RP\sum_{n\in\mathbb{N}}(-g)^n = Rs_u(f).$$

Enfin, si $g \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ est tel que

$$\forall\gamma \in \mathbb{Z}^n, \quad g_\gamma \neq 0 \implies u(\gamma) > 0,$$

la définition de s_u donne directement

$$s_u\Big(\frac{1}{1-g}\Big) = s_u\Big(\frac{1}{1+(-g)}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g^n.$$

5 Séries d'Euler-MacLaurin

5.1 Rationalité des séries associées aux cônes

36. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. On a alors

$$\begin{aligned} E_{A\cup B}(\alpha) &= \mathbb{1}_{A\cup B}(\alpha) + \mathbb{1}_{A\cap B}(\alpha) \\ &= 1 - (1-\mathbb{1}_A(\alpha))(1-\mathbb{1}_B(\alpha)) + \mathbb{1}_A(\alpha)\mathbb{1}_B(\alpha) \\ &= \mathbb{1}_A(\alpha) + \mathbb{1}_B(\alpha) \\ &= E_A(\alpha) + E_B(\alpha). \end{aligned}$$

Par égalité d'images, on en déduit

$$E_{A\cup B} + E_{A\cap B} = E_A + E_B.$$

On a également

$$x^\gamma E_A = \sum_{\beta\in A\cap\mathbb{Z}^n} x^{\gamma+\beta} = \sum_{\alpha\in(\gamma+A)\cap\mathbb{Z}^n} x^\alpha = E_{\gamma+A}.$$

En effet, l'application $\beta \mapsto \gamma+\beta$ permet de définir une bijection de $A \cap \mathbb{Z}^n$ sur $(\gamma + A) \cap \mathbb{Z}^n$, ce qui rend licite le changement de variable $[\alpha = \gamma + \beta]$ effectué dans le calcul ci-dessus.

37. Dans un premier temps, notons J l'intervalle $[1, +\infty[$ et K l'intervalle $[0, 1[$ et observons que

$$\begin{aligned} &(\mathbb{R}_+\gamma_1 + \dots + \mathbb{R}_+\gamma_j + K\gamma_{j+1} + \dots + K\gamma_k) \setminus (\mathbb{R}_+\gamma_1 + \dots + \mathbb{R}_+\gamma_{j-1} + J\gamma_j + \mathbb{R}_+\gamma_{j+1} + \dots + \mathbb{R}_+\gamma_k) \\ &\qquad = \mathbb{R}_+\gamma_1 + \dots + \mathbb{R}_+\gamma_{j-1} + K\gamma_j + \dots + K\gamma_k. \end{aligned}$$

L'inclusion directe est claire.

L'inclusion réciproque découle de la liberté de la famille $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ dans $\mathbb{R}^n$.

En exploitant la remarque liminaire et la question précédente (si $A \cap B = \varnothing$, alors $E_{A\cap B} = 0$) on obtient

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(1-x^{\gamma_1})\cdots(1-x^{\gamma_k})}_{\in\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]}E_{v+C(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)} &= (1-x^{\gamma_1})\cdots(1-x^{\gamma_{k-1}})E_{v+\mathbb{R}_+\gamma_1+\cdots+\mathbb{R}_+\gamma_{k-1}+K\gamma_k}\\
&= \cdots\\
&= (1-x^{\gamma_1})\cdots(1-x^{\gamma_j})E_{v+\mathbb{R}_+\gamma_1+\cdots+\mathbb{R}_+\gamma_j+K\gamma_{j+1}+K\gamma_k}\\
&= \cdots\\
&= E_{v+K\gamma_1+K\gamma_2+\cdots+K\gamma_k}
\end{aligned}
$$

Enfin, le compact

$$\mathbb{Z}^n\cap(v+[0,1]\gamma_1+\cdots+[0,1]\gamma_k)$$

est un ensemble fini. En effet, par l'absurde, s'il existe une suite infinie injective

$$i\in\mathbb{N}\mapsto x_i$$

dans ce compact, elle possède alors une valeur d'adhérence, ce qui est en contradiction avec le fait que

$$\forall i\in\mathbb{N},\quad \|x_i-x_{i+1}\|_\infty\geqslant 1$$

car x_i-v et $x_{i+1}-v$ sont deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées entières.
Par conséquent, l'ensemble

$$(v+K\gamma_1+\cdots+K\gamma_k)\cap\mathbb{Z}^n$$

est également un ensemble fini, donc

$$E_{v+K\gamma_1+\cdots+K\gamma_k}\in\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]\quad\text{puis}\quad E_{v+C(\gamma_1,\ldots,\gamma_k)}\in\mathcal{R}.$$

Fin.