J. 11 1057

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **ANNÉE 2011**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Ce sujet comporte :

- 1 page de garde (recto),
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 1 page d'avertissement (recto),
- 11 pages de texte (recto-verso) numérotées de 1 à 11

CALCULATRICE NON AUTORISÉE

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **EPL/S 2011**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

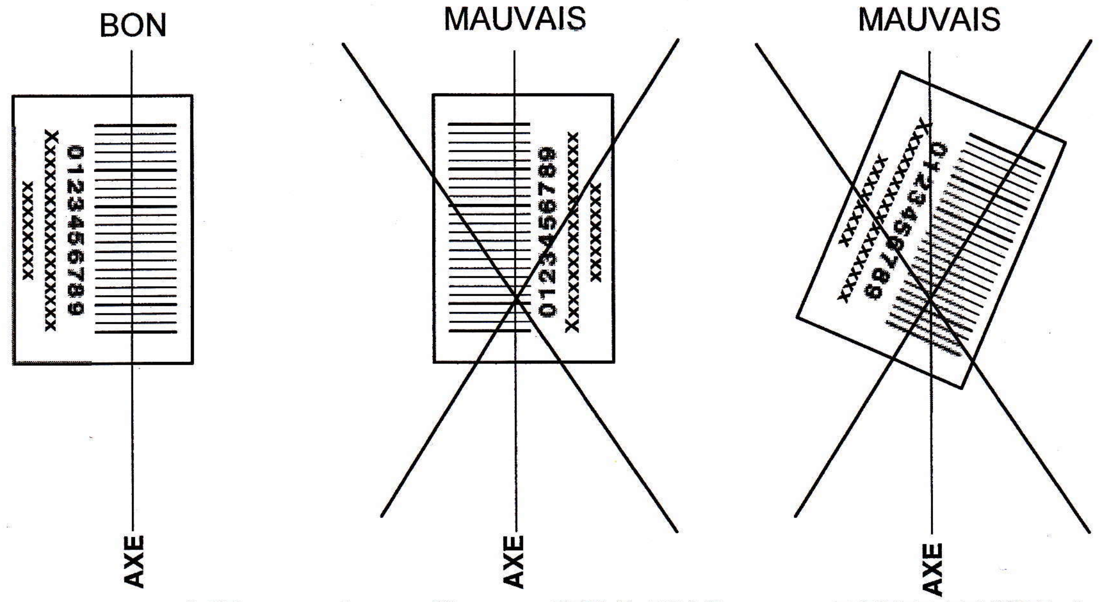
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

Tournez la page S.V.P.

5) Cette épreuve comporte 34 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 34 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 34, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 35 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 34, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

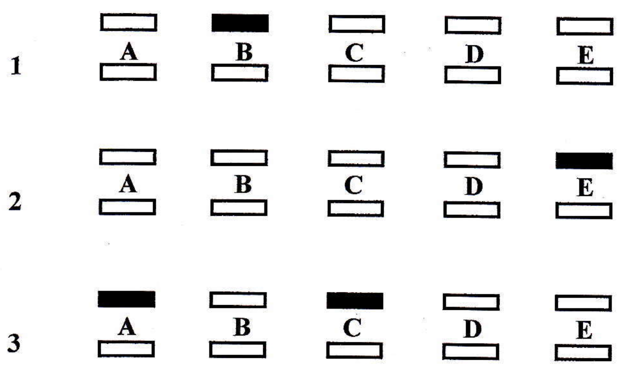
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



Questions liées :

Exercice 1 : De la question 1) à la question 14) (Comprise)
Exercice 2 : De la question 15) à la question 27) (Comprise)
Exercice 3 : De la question 28) à la question 34) (Comprise)

Exercice 1 :

$\Re$ note l'ensemble des réels. On se place dans $\Re \times \Re = \Re^2$ et on considère l'application $f : \left| \begin{array}{l} \Re^2 \to \Re^2 \\ (x,y) \to (3x-y, -x+3y) \end{array} \right.$. On muni $\Re^2$ de sa base canonique B.

Question 1 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) f est un endomorphisme de $\Re^2$
b) f n'est pas linéaire car par exemple $f(2,1) \neq 2f(1,1)$
c) Imf= $\Re^2$ et tout endomorphisme surjectif d'un espace vectoriel quelconque étant bijectif f est un automorphisme
d) Kerf=$\{(0,0)\}$ et tout endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension fini étant bijectif f est un automorphisme

Question 2 : Si C et C' sont deux bases de $\Re^2$, on notera mat(f,C,C') la matrice de f dans les bases C (base de l'ensemble de départ) et C' (base de l'ensemble d'arrivée) Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) Mat(f,B,B)= $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
b) Mat(f,B,B)= $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
c) B'= $((3,-1),(-1,3))$ est une base de $\Re^2$ puisque f est un automorphisme
d) Mat(f,B,B')= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Question 3 : On souhaite résoudre l'inéquation d'inconnue $\lambda \in \Re$: $\text{Rang}(f-\lambda \text{Id}) < 2$ où Id note l'identité de $\Re^2$. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $\text{Rang}(f-\lambda \text{Id}) < 2 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2 + 1 = 0$
b) $\text{Rang}(f-\lambda \text{Id}) < 2 \Leftrightarrow (1+\lambda)^2 - 9 = 0$
c) $\text{Rang}(f-\lambda \text{Id}) < 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$ et $\lambda = 4$
d) $\text{Rang}(f-\lambda \text{Id}) < 2 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ou $\lambda = 4$

Tournez la page S.V.P.

Question 4 : Le théorème du rang permet de dire que pour un espace vectoriel E de dimension fini et g un endomorphisme de E :

a) $\dim \ker g + \dim \operatorname{Im} g < \dim E$
b) $\ker g \oplus \operatorname{Im} g = E$
c) $\dim \ker g + \dim \operatorname{Im} g = \dim E$
d) $\dim \ker g + \operatorname{Rang}\ g = \dim E$

Question 5 : En utilisant ce théorème du rang on peut affirmer que

a) $\operatorname{Rang}(f - \lambda Id) < 2 \Leftrightarrow \exists u \in \Re^2, f(u) = \lambda u$
b) $\operatorname{Rang}(f - \lambda Id) < 2 \Rightarrow \exists u \in \Re^2, f(u) = \lambda u$
c) $\operatorname{Rang}(f - \lambda Id) < 2 \Leftarrow \exists u \in \Re^2, f(u) = \lambda u$
d) $\operatorname{Rang}(f - \lambda Id) < 2 \Leftrightarrow \exists u \in \Re^2, u \neq (0,0), f(u) = \lambda u$

Question 6 :
Soit $(\alpha, \beta) \in \Re^2, \alpha \neq \beta$, soient $u \in \Re^2$ tel que $f(u) = \alpha u$ et $v \in \Re^2$ tel que $f(v) = \beta v$
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) u et v sont nécessairement liés
b) u et v sont nécessairement libres
c) (u,v) est une base de $\Re^2$
d) On ne peut pas savoir si (u,v) est une famille libre ou liée car cela dépend des valeurs de (α, β)

Question 7 : Soit $\alpha \in \Re$, soient $u \in \Re^2$ tel que $f(u) = \alpha u$ et $v \in \Re^2$ tel que $f(v) = \alpha v$
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies

a) Nécessairement u=v
b) (u,v) est nécessairement liée car $\dim \ker(f - \alpha Id) \leq 1$
c) (u,v) peut être une base de $\Re^2$ si cette famille est libre.
d) On ne peut pas savoir si (u,v) est une famille libre ou liée car cela dépend des valeurs de α

Question 8 :
Soit B''=$((1,1),(1,-1))$. B'' est clairement une base de $\Re^2$. On appelle Pass(B,B'') la matrice de passage de la base B à la base B''.
On peut alors affirmer que :

a) Pass(B,B'')=Mat(Id,B,B'')
b) Pass(B,B'')=Mat(Id,B'',B)
c) Pass(B,B'')=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
d) Pass(B,B'')= $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Question 9 :
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies

a) Mat(f,B,B)=Pass(B,B'')Mat(f,B'',B'')Pass(B,B'')
b) Mat(f,B,B)=Pass(B'',B)Mat(f,B'',B'')Pass(B'',B)
c) Mat(f,B'',B'')=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
d) Mat(f,B'',B'')=$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Question 10 : IN note l'ensemble des entiers naturels.
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies

a) $\forall k \in \mathrm{IN}$, $[\mathrm{Mat}(f,B,B)]^k = [\mathrm{Pass}(B,B'')]^k [\mathrm{Mat}(f,B'',B'')]^k [\mathrm{Pass}(B,B'')]^k$
b) $\forall k \in \mathrm{IN}$, $[\mathrm{Mat}(f,B,B)]^k = [\mathrm{Pass}(B,B'')][\mathrm{Mat}(f,B'',B'')]^k [\mathrm{Pass}(B,B'')]$ car $[\mathrm{Pass}(B'',B)][\mathrm{Pass}(B'',B)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
c) $\forall k \in \mathrm{IN}$, $[\mathrm{Mat}(f,B,B)]^k = [\mathrm{Pass}(B'',B)][\mathrm{Mat}(f,B'',B'')]^k [\mathrm{Pass}(B'',B)]$ car $[\mathrm{Pass}(B'',B)][\mathrm{Pass}(B'',B)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
d) $\forall k \in \mathrm{IN}$, $[\mathrm{Mat}(f,B,B)]^k = \begin{pmatrix} 3^k & (-1)^k \\ (-1)^k & 3^k \end{pmatrix}$

Tournez la page S.V.P.

Question 11: Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire que :

a) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} h^{(n)}(t)dt$$

b) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, dont la dérivée nième est continue sur [a,b]

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} h^{(n)}(t)dt$$

c) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n}}{n!} h^{(n)}(t)dt$$

d) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, dont la dérivée nième est continue sur [a,b]

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n}}{n!} h^{(n)}(t)dt$$

Question 12:.Soit $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de la moyenne appliqué au reste intégral de la question précédente permet donc d'écrire :

a) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, $\exists c \in]a,b[$

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} h^{(n)}(c)$$

b) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, $[a,b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a,b], \exists c \in]a,b[$

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} h^{(n)}(c)$$

c) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, $\exists c \in]a,b[$

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^{n}}{n!} h^{(n)}(c)$$

d) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, $[a,b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a,b], \exists c \in]a,b[$

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^{n}}{n!} h^{(n)}(c)$$

Question 13: On peut déduire de la question précédente

a) $\exists c \in \Re, \forall x \in \Re, e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!} e^c$

b) $\forall x \in \Re, \exists c \in \Re, e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!} e^c$

c) $\forall x \in \Re,\ e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

d) $e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ mais seulement si $|x| \leq 1$

Question 14: Si A est une matrice carrée à coefficients réels on définira l'exponentielle de la matrice A comme étant $\exp(A) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ si cette limite à un sens.

a) $\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^4 \end{pmatrix}$

b) $\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas définie car 2>1

c) $\exp\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^3 & e^{-1} \\ e^{-1} & e^3 \end{pmatrix}$

d) $\exp\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = e^3 \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(1) & -\mathrm{sh}(1) \\ -\mathrm{sh}(1) & \mathrm{ch}(1) \end{pmatrix}$

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2 :

IN note ici l'ensemble des entiers naturels. On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ définies par les données de u_0 un réel et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n\left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

Question 15 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$
b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_0 \geq 0$
c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \Leftarrow u_0 \geq 0$
d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0 \Leftrightarrow u_0 \geq 0$ ou $u_0 \leq -1$

Question 16 : Dans cette question nous supposerons que $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ converge vers une limite λ. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) Nécessairement $\lambda=0$
b) On ne peut rien savoir de λ puisque la limite de $\frac{u_n}{n}$ peut être indéterminée.
c) Nécessairement $\lambda=1$
d) $\lambda=+\infty$ si $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ croit plus vite que $(n)_{n\in \mathbb{N}}$

Question 17 : Dans la suite de l'exercice, on défini la suite de fonctions $(f_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ par : Pour tout x réel positif, $f_1(x) = x$ Pour tout n entier naturel non nul, pour tout x réel positif , $f_{n+1}(x) = f_n(x)\left(f_n(x) + \frac{1}{n}\right)$ Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, f_p(u_n)$ est défini
b) Pour que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, f_p(u_n)$ soit défini il suffit que $u_0 > 0$
c) Si $u_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f_n(u_n)$
d) Si $u_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f_n(u_0)$

Question 18 : Dans toute la suite de l'exercice on considérera que $u_0 > 0$
Parmi les assertions suivantes, lesquelles peuvent être démontrées:

a) $\forall n \in IN^*, f_n$ est une fonction indéfiniment dérivable et strictement croissante sur $[0,+\infty[$
b) $\forall n \in IN^*, f_n'' = 0$
c) $\forall n \in IN^*, f_n$ est une fonction polynôme de degré n
d) $\forall n \in IN^*, f_n$ est une fonction strictement positive sur $]0,+\infty[$

Question 19 : Quelles formulations du théorème des valeurs intermédiaires sont correctes parmi les suivantes :

a) Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b] et si f(a).f(b)<0 alors il existe un unique réel x, a<x<b tel que f(x)=0
b) Si f est une fonction strictement croissante sur un intervalle [a,b] alors pour tout $\alpha \in [f(a), f(b)]$, il existe un unique réel x, a<x<b tel que f(x)= α
c) Si f est une fonction continue et croissante sur un intervalle [a,b] alors pour tout $\alpha \in [f(a), f(b)]$, il existe un réel x, a<x<b tel que f(x)= α
d) Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b] et dérivable sur]a,b[alors il existe un unique réel x, a<x<b tel que f(x)=0

Question 20 :En utilisant un théorème des valeurs intermédiaires on peut justifier :

a) $\forall n \in IN^*$, il existe un unique couple de réels (α_n, β_n) tel que $\begin{cases} f_n(\alpha_n) = 1 - \frac{1}{n} \\ f_n(\beta_n) = 1 \end{cases}$ et de plus $0 < \alpha_n < \beta_n < 1$

b) $\forall n \in IN^*$, il existe un unique couple de réels (α_n, β_n) tel que $\begin{cases} f_n(\alpha_n) = 1 - \frac{1}{n} \\ f_n(\beta_n) = 1 \end{cases}$ et de plus $1 > \alpha_n > \beta_n > 0$

c) $\forall n \in IN^*$, il existe un couple des réels (α_n, β_n) tel que $\begin{cases} f_n(\alpha_n) = 1 - \frac{1}{n} \\ f_n(\beta_n) = 1 \end{cases}$ et de plus $0 < \alpha_n < \beta_n < 1$

d) $\forall n \in IN^*$, il existe un unique couple de réels (α_n, β_n) tel que $\begin{cases} f_n(\alpha_n) = 1 - \frac{1}{n} \\ f_n(\beta_n) = 1 \end{cases}$ et de plus $1 > \alpha_n > \beta_n > 0$

Question 21 :En question précédente on a montrer l'existence de (α_n,β_n) tel que
$\begin{cases} f_n(\alpha_n)=1-\frac{1}{n} \\ f_n(\beta_n)=1 \end{cases}$. Pour n entier naturel non nul.
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

a) $\begin{cases} f_{n+1}(\alpha_n)<1-\frac{1}{n+1} \\ f_n(\beta_n)<1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f_{n+1}(\alpha_n)<1-\frac{1}{n+1} \\ f_n(\beta_n)>1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f_{n+1}(\alpha_n)>1-\frac{1}{n+1} \\ f_n(\beta_n)<1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} f_{n+1}(\alpha_n)>1-\frac{1}{n+1} \\ f_n(\beta_n)>1 \end{cases}$

Question 22 : Quelles formulations parmi les suivantes sont correctes:

a) Une suite monotone et majorée converge

b) Une suite monotone et bornée converge

c) Une suite croissante admet une limite, éventuellement infinie

d) Une suite décroissante et majorée converge

Question 23 : Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

a) $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ et $(\beta_n)_{n\in IN^*}$ sont deux suites croissantes
b) $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ est croissante et $(\beta_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante
c) $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante et $(\beta_n)_{n\in IN^*}$ est croissante
d) $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ et $(\beta_n)_{n\in IN^*}$ sont deux suites décroissantes

Question 24: Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

a) $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ converge car c'est une suite croissante et que $\forall n \in IN^*, \alpha_n < \beta_n$
b) $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ converge car c'est une suite croissante et que $\forall n \in IN^*, \alpha_n < 1$
c) $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ et $(\beta_n)_{n\in IN^*}$ sont convergentes vers L et L' respectivement et comme $\forall n \in IN^*, \alpha_n < \beta_n$, L<L'
d) $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ et $(\beta_n)_{n\in IN^*}$ sont convergentes vers L et L' respectivement et comme $\forall n \in IN^*, \alpha_n \leq \beta_n$, L≤L'

Question 25:
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

a) $\forall n \in IN^*, 1-\frac{1}{n} \leq f_n(L) \leq f_n(L') < 1$
b) $\forall n \in IN^*, 1-\frac{1}{n} \leq f_n(L') < f_n(L) < 1$
c) L<L'
d) $f_n(u_1)-f_n(L)$ est du signe de $u_1 - L$

Question 26: On supposera que $u_1 < L$
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

a) $(u_n)_{n\in IN}$ est croissante
b) $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante
c) $(u_n)_{n\in IN}$ converge vers 0
d) $(u_n)_{n\in IN}$ converge vers 1

Question 27: On supposera que $u_1 > L$
Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

a) $(u_n)_{n\in IN}$ est croissante
b) $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante
c) $(u_n)_{n\in IN}$ converge vers 1
d) $(u_n)_{n\in IN}$ diverge

Exercice 3 :

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et continues sur l'ensemble des réels $\Re$ et vérifiant :

Pour tout réel x, $f(2x) = \int_0^x (x-t)f(2t)dt + 1$ **(P)**

Question 28: Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

a) $\int_0^x (x-t)f(2t)dt$ est définie pour tout réel car $t \to (x-t)f(2t)$ est définie sur $\Re$

b) $\int_0^x (x-t)f(2t)dt$ est définie pour tout réel car $t \to (x-t)f(2t)$ est continue sur $\Re$

c) $\varphi : x \to \int_0^x (x-t)f(2t)dt$ est dérivable et $\varphi'(x) = xf(0)$

d) $\varphi : x \to \int_0^x (x-t)f(2t)dt$ est dérivable si et seulement si f est dérivable

Question 29: Dans la suite de l'exercice f vérifie la propriété **(P)** Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

a) f est indéfiniment dérivable sur $\Re$

b) $\forall x \in \Re, f'(2x) = (x-x)f(2x) = 0$

c) $\forall x \in \Re, f'(2x) = \int_0^x f(2t)dt - xf(2x)$

d) $\forall x \in \Re, f'(2x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(2t)dt$

Question 30: Parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

a) $\forall x \in \Re, f''(x) = f(x)$

b) $\forall x \in \Re, f''(x) = \frac{1}{4}f(x)$

c) $\forall x \in \Re, f''(x) = 4f(x)$

d) Nécessairement, $\forall x \in \Re, f(x) = f(0) = 0$

Question 31 : On peut alors affirmer qu'il existe un couple de réel A et B tels que :

a) $\forall x \in \Re$, $f(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$
b) $\forall x \in \Re$, $f(x) = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$
c) $\forall x \in \Re$, $f(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$
d) $\forall x \in \Re$, $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}\right)$

Question 32 : En calculant directement f(0) on peut affirmer que :

a) $f(0)=0$
b) $f(0)=1$
c) $A+B=1$
d) $A=0$

Question 33 : On peut donc en déduire qu'il existe un réel A tel que

a) $\forall x \in \Re$, $f(x) = A\,sh\left(\frac{x}{2}\right) + e^{-\frac{x}{2}}$
b) $\forall x \in \Re$, $f(x) = Ae^{x}\sin x$
c) $\forall x \in \Re$, $f(x) = 1 + A\,sh(x)$
d) $\forall x \in \Re$, $f(x) = A\,sh(x) + e^{-x}$

Question 34 : On peut donc affirmer que :

a) Les solutions à l'exercice sont les fonctions définies par $\forall x \in \Re$
   $f(x) = A\,sh\left(\frac{x}{2}\right) + e^{-\frac{x}{2}}$ où A est un réel quelconque
b) Les solutions à l'exercice sont les fonctions définies par $\forall x \in \Re$ $f(x) = Ae^{x}\sin x$ où A est un réel quelconque
c) Seule la fonction définie par $\forall x \in \Re$ $f(x) = ch\left(\frac{x}{2}\right)$ est solution à l'exercice
d) Il n'y a pas de solution à l'exercice.