CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

CALCULATRICE AUTORISÉE

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE EPL/S 2009

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

AVERTISSEMENT

QUESTIONS LIÉES

Exercice 1 : Questions 1 à 12

Exercice 2 : Questions 13 à 22

Exercice 3 : Questions 23 à 27

Exercice 4 : Questions 28 à 31

Exercice 5 : Questions 32 à 36

EXERCICE 1

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, et $a \in \mathbb{R}$.
Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
On considère alors l'application φ_a définie par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq a, \quad \varphi_a(f)(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)\ dt.$$

Question 1 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A) Si $\circ$ note la composition de deux applications, $(E, \circ)$ est un groupe.

B) Si $+$ note la somme de deux applications, $(E, +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $Id_E \ : \ x \mapsto x$.

C) Si . note la multiplication d'une application par un scalaire, $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

D) Si $\times$ note la multiplication de deux applications, $(E, +, \times)$ est un corps.

Question 2 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A) f admet une primitive, car pour toute fonction g définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x g(t)\ dt$ en est une primitive.

B) φ_a est prolongeable par continuité en a.

C) Pour toute f de E, $\varphi_a(f)$ est prolongeable par continuité en a en posant $\varphi_a(f)(a) = f(a)$.

D) Pour toute f de E, $\varphi_a(f)$ est prolongeable par continuité en a en posant $\varphi_a(f)(a) = f'(a)$.

Nota Bene : Dans toute la suite, si l'on a prolongé une fonction ψ par continuité en a, on continuera à appeler ψ cette fonction ainsi prolongée.

Question 3 : On peut affirmer dès lors que :

A) φ_a définit un endomorphisme de E, puisque $\forall (f, g) \in E^2$, $\varphi_a(fg) = \varphi_a(f)\varphi_a(g)$.

B) $\forall (f, g) \in E^2$, $\varphi_a(f + g) = \varphi_a(f) + \varphi_a(g)$ et donc φ_a est linéaire.

C) $\varphi_a(E) = E$ puisque $\varphi_a(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

D) $E \subset \varphi_a(E)$ puisque $\varphi_a(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Question 4 : Si on étudie la dérivabilité de $\varphi_a(f)$ sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que :

A) Si $x \neq a$, $\forall f \in E$, $\varphi_a(f)$ est dérivable en x et sa dérivée vaut $\dfrac{f(x) - \varphi_a(f)(x)}{x-a}$.

B) Si $x \neq a$, $\forall f \in E$, $\varphi_a(f)$ est dérivable en x et sa dérivée vaut $\dfrac{f(x) - f(a) - \varphi_a(f)(x)}{x-a}$.

C) Si g est la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x - a|$ alors $\varphi_a(g) = \dfrac{g}{2}$.

D) $\forall f \in E$, $\varphi_a(f)$ est dérivable en a.

Question 5 : Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la formule de Taylor-Young va nous permettre d'écrire que :

A) $f(x) = f(a) - f'(a)(a - x) + \underset{x \to a}{o}(x - a)$

B) $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \underset{x \to a}{o}((x - a)^2)$

C) Si $x \neq a$, $\dfrac{1}{x-a}\left[\varphi_a(f)(x) - f(a)\right] = \dfrac{f'(a)}{2} + \underset{x \to a}{o}(1)$

D) Si $x \neq a$, $\dfrac{1}{x-a}\left[\varphi_a(f)(x) - f(a)\right] = \dfrac{f'(a)}{2} + \underset{x \to a}{o}(x-a)$

Question 6 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A) Un théorème du cours permet d'affirmer que si h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un point réel a, et si de plus $\lim\limits_{x \to a} h'(x)$ existe et est fini alors h est dérivable en a.

B) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors comme $\varphi_a(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point réel différent de a, et que $\lim\limits_{x \to a}[\varphi_a(f)]'(x) = \dfrac{f'(a)}{2}$, $\varphi_a(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

C) Même si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on ne peut être certain que $\varphi_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

D) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il est certain que $\varphi_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Question 7 : On cherche à savoir si φ_a est injective ou surjective. On peut dire que :

A) $Ker(\varphi_a) = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \int_a^x f(t)\ dt = 0\}$.

B) $Ker(\varphi_a) = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = f(a)\}$.

C) φ_a est injective car $Ker(\varphi_a) = \{O_E\}$.

D) φ_a est surjective parce que pour un endomorphisme d'espace vectoriel, l'injectivité est équivalente à la surjectivité.

Question 8 : Soit b un réel. On considère $g_b\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x-b| \end{array}\right.$.

On veut résoudre l'équation d'inconnue f :

$$\varphi_a(f) = g_b.$$

A) S'il existe une solution, alors elle est unique. De plus, si $a = b$, alors d'après la **question 4**, $f = 2g_a$.

B) S'il existe une solution f, alors elle n'est pas unique puisque toutes les fonctions de la forme $f + f_0$ où $f_0 \in Ker\varphi_a$ sont encore solutions.

C) Si $a \neq b$, il existe une solution puisque φ_a est surjective.

D) Si $a \neq b$, il ne peut exister de solution puisque g_b n'est pas dérivable en b.

Question 9 : Soit n un entier naturel. On appelle $F = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On munit F de sa base canonique $B = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$.

On appelle ψ_a la restriction de φ_a à F, c'est à dire l'application telle que

$$\forall P \in F,\quad \psi_a(P) = \varphi_a(P).$$

A) ψ_a est un endomorphisme de F, car $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\psi_a(X^i) = \frac{1}{i+1}\sum_{k=0}^{i} a^k X^{i+1-k}$.

B) $Ker\psi_a \subset \{O_F\}$ et ψ_a est injectif.

C) ψ_a est surjectif puisque ψ_a est injectif et que $Dim(F) = n$.

D) ψ_a ne peut pas être surjectif puisque φ_a ne l'est pas.

Question 10 : On considère la famille $B' = (1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n)$.
On notera A (respectivement A') la matrice de ψ_a relativement à la base B (respectivement B').
P désignera la matrice de passage de B à B'.
Pour une matrice quelconque M de taille $n \times p$, on notera $M(i,j)$ l'élément de M situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne. On pourra noter $M = \big(M(i,j)\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
$\binom{k}{i}$ désigne le coefficient binômial $\dfrac{k!}{i!\ (k-i)!}$ si $k \geq i \geq 0$ et 0 sinon.

A) B' est une base de F car si a est nul, on retrouve la base initiale.

B) $\forall (i,k) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $P(i,k) = \dbinom{k}{i}(-a)^{k-i}$.

C) $\forall (i,k) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $P(i,k) = \dbinom{k}{i}a^{k-i}$.

D) $\left(\dbinom{k}{i}(-a)^{k-i}\right)_{(i,k)\in[\![1,n+1]\!]^2} \cdot \left(\dbinom{k}{i}a^{k-i}\right)_{(i,k)\in[\![1,n+1]\!]^2} = I_{n+1}$

Question 11 : On peut dès lors affirmer :

A) P est inversible, car les matrices de passage sont toujours inversibles et $A = P^{-1}A'P$.

B) P est inversible, car les matrices de passage sont toujours inversibles et $A = PA'P^{-1}$.

C) A' est la matrice diagonale telle que : $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $A'(i,i) = \dfrac{1}{i}$.

D) A' est la matrice diagonale telle que : $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $A'(i,i) = i+1$.

Question 12 : Grâce aux résultats de la **question 11**, on peut affirmer que :

A) $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $Rang[(i+1)A - I_n] = 1$

B) $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $Dim(Ker[(i+1)A - I_n]) = 1$

C) Pour tout entier naturel i, il existe une unique solution à l'équation d'inconnue Q : $\psi_a(Q) = \dfrac{Q}{1+i}$

D) Pour tout entier naturel i, il existe une infinité de solutions à l'équation d'inconnue Q : $\psi_a(Q) = \dfrac{Q}{1+i}$

FIN DE L'EXERCICE 1

EXERCICE 2

On se place dans le plan euclidien P.
On choisit deux points distincts F et F'. On notera $a = \dfrac{FF'}{2}$.
Le but de cet exercice est l'étude de l'ensemble L_a des points M du plan vérifiant

$$MF \times MF' = a^2.$$

Question 13 : Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan P tel que O soit le milieu de FF' et $\vec{i}$ soit porté par (FF'). Alors :

A) $L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)\}$.

B) $L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (x^2+y^2)^2 = 2a^2(y^2-x^2)\}$.

C) $L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ y = \sqrt{\sqrt{4a^2x^2+a^4} - (x^2+a^2)}\}$.

D) $L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \sqrt{\sqrt{4a^2x^2+a^4}-(x^2+a^2)}\ ou\ y = -\sqrt{\sqrt{4a^2x^2+a^4}-(x^2+a^2)}\}$.

Question 14 : L'ensemble L_a admet pour équation en coordonnées polaires : $\rho^2 = 2a^2\cos(2\theta)$ (On ne demande pas de vérifier ce résultat qui doit être admis).
On a donc, en notant $\rho(\theta)$ l'unique solution (si elle existe) d'inconue ρ de l'équation polaire :

A) $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$ donc L_a est symétrique par rapport à l'origine du repère.

B) $\rho(\theta) = \rho(\pi-\theta)$ donc L_a est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

C) $\rho(\theta) = \rho(\pi+\theta)$ donc L_a est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

D) On peut se contenter de mener l'étude de la courbe pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ puis utiliser trois symétries minimum pour construire le reste de L_a.

Question 15 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A) $\theta \mapsto \cos(2\theta)$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, de dérivée négative, donc $\rho(\theta)$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, de dérivée négative.

B) $\rho(\theta)$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ comme composée de deux fonctions décroissantes sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

C) $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = +\infty$ donc L_a admet une tangente horizontale au point $(0, a)$.

D) L_a admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente et se situe au-dessus de cette tangente.

Question 16 : Si on considère l'ensemble $L_a \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geq 0\}$, on voudrait connaître l'aire intérieure, notée A, à la courbe. On peut écrire que :

A) $A = \displaystyle\iint_{\substack{\rho \in [0, a\sqrt{2\cos(2\theta)}] \\ \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]}} d\rho\, d\theta.$

B) $A = \displaystyle\iint_{\substack{\rho \in [0, a\sqrt{2\cos(2\theta)}] \\ \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]}} 2\, d\rho\, d\theta.$

C) $A = a^2$.

D) $A = \dfrac{a^2}{2}$.

Soit Ω un point du plan. Soit k un réel non nul.
Si $\overline{AB}$ note la mesure algébrique du segment $[AB]$, on définit I_k^Ω par la donnée de $M' = I_k^\Omega(M)$ vérifiant :

$$(P1)\ \ \Omega,\ M\ et\ M'\ sont\ align\acute{e}s$$

$$(P2)\ \ \overline{\Omega M} \times \overline{\Omega M'} = k.$$

Question 17 : On peut alors affirmer :

A) I_k^Ω est une application bien définie de P dans lui-même puisque pour chaque point M de P, il existe un et un seul point M' vérifiant $(P1)$ et $(P2)$.

B) I_k^Ω est une application bien définie de $P \setminus \{\Omega\}$ puisque pour chaque point M de P, différent de Ω, il existe un et un seul point M' vérifiant $(P1)$ et $(P2)$.

C) Si $k \neq 0$, I_k^Ω est une bijection de bijection réciproque $I_{\frac{1}{k}}^\Omega$.

D) Si $k \neq 0$, I_k^Ω est une bijection de bijection réciproque I_k^Ω.

On se ramène au plan complexe. Soit deux points N et N' de P tels que Ω, N et N' soient alignés et distincts.
On note ω, z et z' les affixes respectifs de Ω, N et N'.

Question 18 : On peut alors démontrer que :

A) $\overline{\Omega N} \times \overline{\Omega N'} = (z-\omega)\overline{(z'-\omega)} = \overline{(z-\omega)}(z'-\omega)$.

B) Si $N' = I_k^\Omega(N)$, alors $z' = \omega + \dfrac{k}{\overline{z-\omega}}$.

C) Les points fixes de I_k^Ω forment le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{|k|}$.

D) Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que I_k^Ω ne possède qu'un point fixe unique.

Dans les **questions 19 et 20**, on va chercher à déterminer la composée $(I_\alpha^O)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Question 19 : Avec les notations de la question précédente, on supposera que $N' = (I_\alpha^O)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O(N)$.
On peut démontrer que :

A) Si $\Omega = O$, $(I_\alpha^O)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O = I_{\frac{\alpha^2}{k}}^O$.

B) Si N est distinct de O, $I_\alpha^O(N) = \Omega \Leftrightarrow z = \dfrac{\alpha}{\omega}$.

C) Si $\Omega \neq O$ et si $z \notin \left\{0, \frac{\alpha}{\overline{\omega}}\right\}$, alors $z' = \dfrac{(\alpha - \omega\overline{z})}{\alpha\overline{\omega} + \overline{z}(k - |\omega|^2)}$.

D) Si $\Omega \neq O$ et si $z \notin \left\{0, \frac{\alpha}{\omega}\right\}$, alors $z' = \dfrac{\alpha(\alpha - \omega\overline{z})}{\alpha\overline{\omega} + \overline{z}(k - |\omega|^2)}$.

Question 20 : On supposera dans cette question que $\Omega \neq O$ et $k = |\omega|^2$.
On notera de plus $\omega = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Il est possible de montrer que :

A) $(I_\alpha^O)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une application affine et son application linéaire associée est donnée par la matrice $A = \dfrac{1}{|\omega|^2}\begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ et $(I_\alpha^O)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O(O)$ est le point d'affixe $\alpha\omega$.

B) A est une matrice orthogonale de déterminant négatif c'est donc une rotation vectorielle et $(I_\alpha^O)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une rotation.

C) A est une matrice orthogonale de déterminant négatif, c'est donc une symétrie orthogonale vectorielle et $(I_\alpha^O)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine.

D) A possède des points fixes et est orthogonale. A ne peut donc qu'être une symétrie orthogonale vectorielle et $(I_\alpha^O)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine.

Question 21 : On supposera dans cette question que $\Omega \neq O$ et $k \neq |\omega|^2$.
Il est possible de montrer que :

A) $z' = \dfrac{\alpha\omega}{|\omega|^2 - k} + \dfrac{k\alpha^2}{(|\omega|^2 - k)^2} \dfrac{1}{\overline{z} - \frac{\alpha\overline{\omega}}{|\omega|^2 - k}}$

B) $z' = \dfrac{\omega}{|\omega|^2 - k} + \dfrac{k\alpha}{(|\omega|^2 - k)^2} \dfrac{1}{\overline{z} - \frac{\alpha\overline{\omega}}{|\omega|^2 - k}}$

C) $(I_\alpha^O)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O = I_\beta^S$ où S est le point d'affixe $\dfrac{\alpha\omega}{|\omega|^2 - k}$ et $\dfrac{k\alpha^2}{(|\omega|^2 - k)^2}$

D) $(I_\alpha^O)^{-1} \circ I_k^\Omega \circ I_\alpha^O = I_\beta^S$ où S est le point d'affixe $\dfrac{\alpha\omega}{|\omega|^2 - k}$ et $\dfrac{k\alpha}{(|\omega|^2 - k)^2}$

Question 22 : On considère la conique C_a définie par $x^2 - y^2 = 2a^2$.
On peut alors affirmer :

A) La nature de C_a dépend de la valeur de a. Plus précisément, c'est une ellipse si $a < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, une hyperbole si $a > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

B) Une équation polaire de C_a est $\rho^2 \cos(2\theta) = 2a^2$, $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

C) Si on note $M \neq O$ un point de L_a et M' un point de la conique C_a tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM'})$ $[\pi]$, alors $\overline{OM} \times \overline{OM'} = 2a^2$.

D) $I_1^O\left(C_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = L_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

FIN DE L'EXERCICE 2

EXERCICE 3

Dans cet exercice, p désigne un réel strictement positif et f est l'application définie par :

$$\forall t > 0, \quad f(t) = t^p + pt.$$

f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur $f(0) = 0$. On continuera à appeler f l'application de $\mathbb{R}^+$ ainsi définie.

Question 23 : On peut affirmer que :

A) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f'(t) = pt^{p-1} + p > 0$.

B) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ comme somme d'une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ et d'une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

C) Si f est une fonction strictement croissante définie sur $\mathbb{R}^+$, alors f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+)$.

D) Pour pouvoir affirmer qu'une fonction strictement croissante est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+)$, il est nécessaire que f soit continue.

On peut en fait démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Nous noterons g sa bijection réciproque.

Question 24 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont exactes :

A) g est continue, croissante et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que réciproque d'une fonction f continue, croissante et dérivable sur $g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

B) g n'est dérivable en x réel que si f est dérivable en $g(x)$ et que $f'(g(x)) \neq 0$.

C) g est dérivable en 0 et $g'(0)$ vaut $\frac{1}{p}$ si $p \geq 1$ et 0 si $0 < p < 1$.

D) Si $0 < p < 1$, g n'est pas dérivable en 0 car f n'est pas dérivable en $g(0)$.

Dans la suite de cet exercice, a désigne un réel strictement positif fixé et on note alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \frac{(p-1)t^p + a}{p(t^{p-1}+1)}.$$

Si φ admet un éventuel prolongement par continuité en 0, alors on appellera encore φ ce prolongement.

Question 25 : On peut dès lors affirmer que

A) $\forall p > 0$, $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{p-1}{p} t$ et φ est prolongeable pas continuité en 0 par $\varphi(0) = 0$.

B) Pour $p > 1$, φ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

C) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) - t = \frac{f(t)-a}{f'(t)}$.

D) Si $0 < p < 1$, les seules solutions positives à l'équation $\varphi(t) = t$ sont 0 et $g(a)$.

Dans la suite de cet exercice, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

Question 26 : Dans cette question on suppose que $0 < p < 1$.
On peut alors montrer que :

A) $\sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}} > g(a)$ et $\varphi\left(\left[0, \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}\right]\right) \subset [0, g(a)]$.

B) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et ceci quel que soit le choix de $u_0 > 0$.

C) Si $u_0 \in \left[0, \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}\right]$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

D) Si $u_0 \in \left[0, \sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}\right]$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt[p]{\dfrac{a}{1-p}}$.

Question 27 : Dans cette question, on suppose que $p > 1$ et $u_0 = \dfrac{a}{p}$.
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

A) $g(a) < \dfrac{a}{p}$ et pour tout $t \in \left[g(a), \dfrac{a}{p}\right]$, $|\varphi'(t)| \leq \frac{p-1}{p}$.

B) Le théorème des accroissements finis dit que si φ est continue sur $\left[g(a), \dfrac{a}{p}\right]$ et dérivable sur $\left]g(a), \dfrac{a}{p}\right[$, alors il existe $\theta \in \left]g(a), \dfrac{a}{p}\right[$ tel que

$$\forall (t,t') \in \left]g(a), \frac{a}{p}\right[^2, \ t \neq t', \quad \frac{|\varphi(t) - \varphi(t')|}{|t-t'|} = \varphi'(\theta).$$

C) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - g(a)| \leq \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^{n+2} |u_0 - g(a)|$.

D) L'inégalité $\left|\frac{p-1}{p}\right| \leq 1$ est suffisante pour affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(a)$.

FIN DE L'EXERCICE 3

EXERCICE 4

On notera dans cet exercice E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues de $[-1,1]$ sur $\mathbb{R}$.
P (respectivement I) désignera, dans la suite de l'exercice, l'ensemble des fonctions définies, continues et paires (respectivement impaires) de $[-1,1]$ sur $\mathbb{R}$.

Question 28 : On peut alors affirmer que :

A) P n'est pas un sous-espace vectoriel de E car si $\lambda < 0$ et $f \in P$ alors $\lambda f \in I$.

B) Il n'existe pas de fonction à la fois paire et impaire sur $[-1,1]$.

C) $E = P \oplus I$ car $P \cap I = \emptyset$ et $dim(E) = dim(P) + dim(I)$.

D) $E = P \oplus I$ car $\forall f \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} - \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ et que cette écriture de f comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est unique.

Question 29 : On définit l'application φ par : $\forall (f,g) \in E \times E, \quad \varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\ dt$.

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

A) φ est bien définie car elle s'applique à des fonctions continues sur $]-1,1[$.

B) Si f est continue par morceaux sur $[-1,1]$ et positive, alors $\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = 0 \Rightarrow f = 0$.

C) φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive ; c'est donc un produit scalaire et (E,φ) est un espace vectoriel euclidien.

D) φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive ; c'est donc un produit scalaire mais (E,φ) n'est pas un espace vectoriel euclidien.

Question 30 : On choisit dans cette question $(f,g) \in P \times I$. Si on note, pour A un sous-espace vectoriel quelconque de E, $A^{\perp}$ l'orthogonal de A, on peut écrire que :

A) $\int_{-1}^{0} f(t)\ g(t)\ dt = -\int_{0}^{1} f(t)\ g(t)\ dt$.

B) $\int_{-1}^{0} f(t)\ g(t)\ dt = \int_{0}^{1} f(t)\ g(t)\ dt$.

C) À ce stade du raisonnemen : $P \subset I^{\perp}$ ou $I \subset P^{\perp}$.

D) À ce stade du raisonnement : $P \subset I^{\perp}$ et $I \subset P^{\perp}$.

Question 31 : Si $f \in P^{\perp}$, on peut donc écrire que :

A) Comme $f \in E$, il existe $(f_P, f_I) \in P \times I$ tel que $f = f_P + f_I$ et $\forall g \in P$, $\varphi(f_I, g) = 0$.

B) Comme $f \in E$, il existe $(f_P, f_I) \in P \times I$ tel que $f = f_P + f_I$ et $\forall g \in I$, $\varphi(f_P, g) = 0$.

C) En choisissant judicieusement g, $P^{\perp} \subset I$ et $P^{\perp} = I$.

D) Le cosinus hyperbolique est la projetion orthogonale sur P de la fonction exponentielle.

FIN DE L'EXERCICE 4

EXERCICE 5

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $c \neq 0$ et $(a,b) \neq (0,0)$ et l'on considère l'équation aux dérivées partielles suivante, d'inconnue f de classe au moins $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$:

$$a\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ +\ b\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ +\ c\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ =\ 0 \quad (E)$$

On effectue le changement de variable suivant : $u = x + \alpha y$ et $v = x + \beta y$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
On posera dans la suite de cet exercice $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, $P = a + bX + cX^2$ et $K = 2a + b(\alpha + \beta) + 2c\alpha\beta$.

Question 32 : On peut alors affirmer que :

A) L'application $H\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (u,v) \end{array}$ est bijective si et seulement si $\alpha \neq \beta$ et sous cette condition, H et H^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

B) $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$

C) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \alpha \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$

D) g vérifie l'équation $P(\alpha)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + K\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + P(\beta)\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0 \quad (E')$.

On se place, dans les **questions 33 et 34**, dans le cas où $b^2 - 4ac > 0$.

Question 33 : On peut alors affirmer que :

A) P possède deux racines distinctes r_1 et r_2 vérifiant $r_1 + r_2 = -\frac{a}{c}$ et $r_1 r_2 = \frac{b}{c}$.

B) P possède deux racines distinctes r_1 et r_2. On peut donc choisir deux réels α et β différents et tels que $P(\alpha) = P(\beta) = 0$ et $K \neq 0$.

C) $K = P'(\alpha) + P'(\beta)$ et pour que K soit nul, il faudrait que α et β soient racines doubles de P, ce qui est ici impossible. Donc $K \neq 0$, pour tout $\alpha \neq \beta$.

D) g vérifie l'équation $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

Question 34 : On est toujours dans le cas où $b^2 - 4ac > 0$. On peut dire que :

A) On a $\dfrac{\partial g}{\partial u} = M$ où M est une constante réelle.

B) On a $\dfrac{\partial g}{\partial u} = M(u) + N$ où M est une fonction de classe au moins $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et N une constante réelle.

C) Les fonctions solutions de (E) sont toutes de la forme $f(x,y) = h_1(x + r_1 y) + h_2(x + r_2 y)$ où h_1 et h_2 sont des fonctions arbitraires de classe au moins $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et r_1 et r_2 sont les deux racines du polynôme P.

D) Les fonctions solutions de (E) sont toutes de la forme $f(x,y) = h_1(x + r_1 y).h_2(x + r_2 y)$ où h_1 et h_2 sont des fonctions arbitraires de classe au moins $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et r_1 et r_2 sont les deux racines du polynôme P.

On se place, dans les **questions 35 et 36**, dans le cas où $b^2 - 4ac = 0$.

Question 35 : On peut alors affirmer que :

A) P ne possède plus qu'une racine double r, mais le raisonnement précédent reste correct et on a : les fonctions solutions de (E) sont toutes de la forme $f(x, y) = h(x + ry)$ où h est une fonction arbitraire de classe au moins $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

B) P ne possède plus qu'une seule racine double r, et en choisissant $\alpha = r$ et $\beta = 0$, on obtient $K = 0$.

C) P ne possède plus qu'une seule racine double r, et en choisissant $\alpha = r$ et $\beta = 0$, on obtient $K \neq 0$.

D) P ne possède plus qu'une seule racine double r, et en choisissant $\alpha = r$ et $\beta = 0$, on ne sait pas si K est nul ou pas (cela dépend de la valeur de r).

Question 36 : On est toujours dans le cas où $b^2 - 4ac = 0$ et l'on peut affirmer que :

A) (E') est équivalente à $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$

B) (E') est équivalente à $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$

C) $f(x, y) = x \cos(x + ry) + \sin(x + ry)$ où r est l'unique racine du polynôme P est solution de (E).

D) Les solutions de (E) sont toutes de la forme $f(x, y) = x.h(x + ry)$ où r est l'unique racine du polynôme P et où h est une fonction de classe au moins $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.