CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Ce sujet comporte (dans l'énoncé d'origine, pas dans cette version) :
- 1 page de garde
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM
- 10 pages de texte numérotées de 1 à 10.

CALCULATRICE AUTORISÉE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

À LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

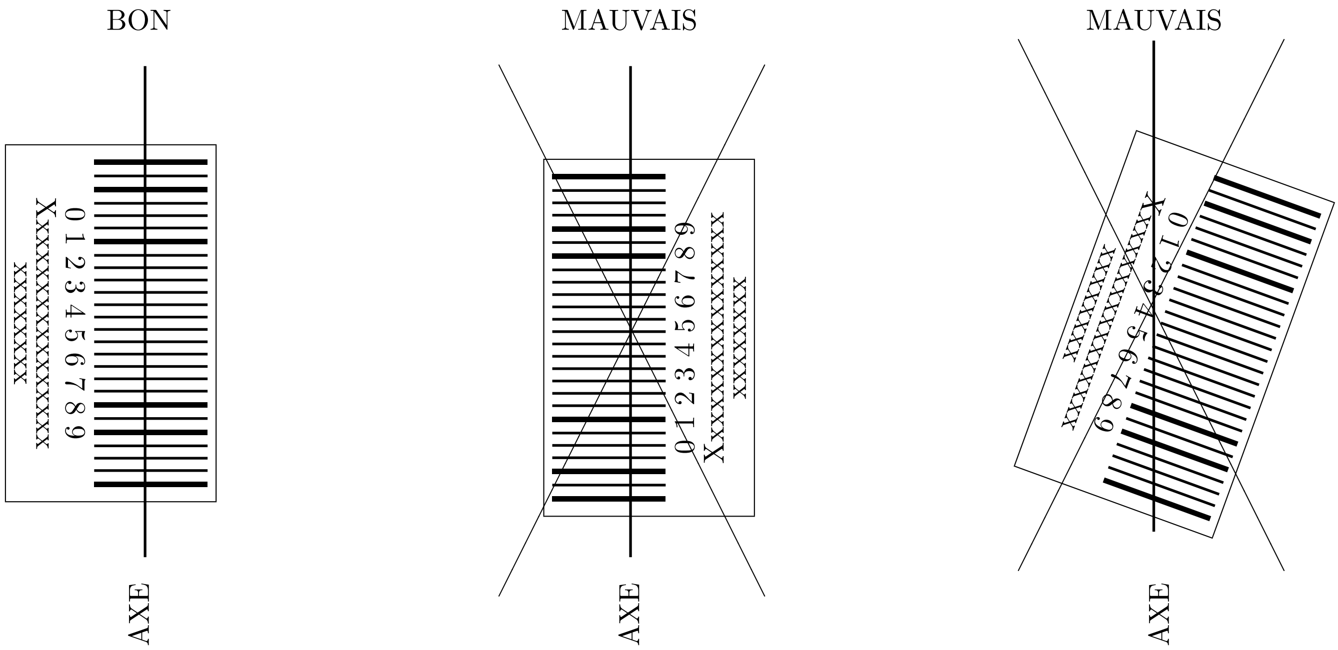
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, l'**étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.

Chaque candidat devra choisir au 24 questions parmi les 36 proposées.
Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.
Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) À chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
  la ligne correspondante doit rester vierge.
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
  vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
  vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
  vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

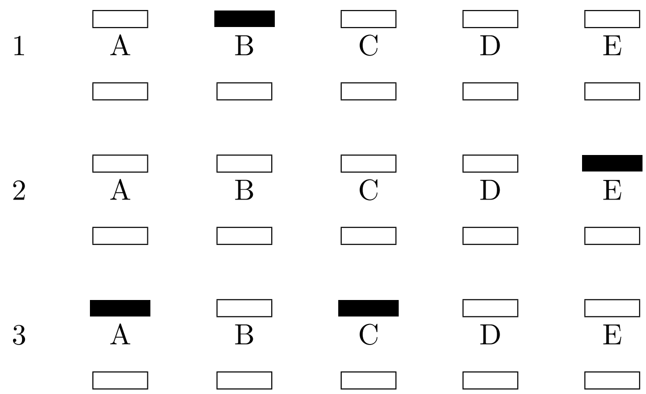
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit $(-1)(-3)$ vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D)2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



EPL Mathématiques

Le sujet original est plein d'erreurs. Les erreurs mathématiques ont été conservées ; les fautes d'orthographe vraiment flagrantes ont été corrigées.

1) Dans les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?
   a) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos 5\theta = 16\cos^5\theta + 5\cos\theta$
   b) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$
   c) $\cos\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$
   d) $\cos\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$ car $\cos\dfrac{\pi}{10} \leqslant \cos\dfrac{\pi}{3}$
2) Soit le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère alors les points $I = (1, 2)$, $M = (2, 3)$ et $M' = (\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.
   La similitude de centre I qui transforme M en M' est alors :
   a) de rapport 2
   b) d'angle $\dfrac{\pi}{4}$
   c) de rapport $\dfrac{1}{2}$
   d) d'angle $\dfrac{\pi}{3}$
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on cherche à résoudre $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = 0$ où θ est une inconnue réelle
   a) Si θ est solution alors $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin^2(k\theta) = 2^n$
   b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = \cos(n\theta)\left(\dfrac{\cos\theta}{2}\right)^n$
   c) L'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{\pi}{n} + \dfrac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   d) Il n'y a pas de solution à cette équation
4) On considère l'application f qui à tout complexe $z \neq i$ associe $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$.
   On note $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) = 0\}$.
   a) f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C}$
   b) $f(\mathbb{R}) = U$
   c) $f(U) = i\mathbb{R} \setminus \{i\}$
   d) $f(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$
5) On cherche le lieu des points d'affixe z tels que z, z^2 et z^5 soient les affixes de trois points alignés. On note H cet ensemble de points et H_c l'ensemble de leurs affixes.
   a) $z \in H_c \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $z^3 + z^2 + z$ est imaginaire pur
   b) $\mathrm{Im}\left(z^3 + z^2 + z\right) = 3\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2 - \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) + 1$
   c) H est une hyperbole équilatère centrée en $\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$ de grand axe parallèle à l'axe des imaginaires, de demi grand axe $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$
   d) H contient une hyperbole centrée en $\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$ de grand axe parallèle à l'axe des imaginaires, de demi grand axe $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et dont les asymptotes ont comme coefficients directeurs $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

6) On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies par :

$$\forall n \geqslant 2, u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\frac{\pi}{2^k} \text{ et } v_n = u_n \sin\frac{\pi}{2^n}$$

a) $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et majorée par 1. Elle converge donc.

b) $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

c) $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

d) $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$

Attention : questions 7 et 8 liées

7) Soit la fonction réelle f de la variable réelle t définie par :

$$\forall t > 0, f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$$

a) f est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition, croissante et concave

b) La courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 1$

c) f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et sa bijection réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car $\forall t > 0, f'(t) \neq 0$

d) f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et sa bijection réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car toute bijection dérivable admet une réciproque dérivable

8) En utilisant f définie en question 7), on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! a_n, f(a_n) = \frac{1}{n}$$

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante car f^{-1} est décroissante et $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puisque f^{-1} est continue en 0

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geqslant 0$

d) $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

9) On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$ et a est un réel strictement positif.

a) $y \mapsto \displaystyle\int_0^y f(t)\ \mathrm{d}t$ est continue sur $[y, y+a]$ et dérivable sur $]y, y+a[$, $\forall y \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \int_y^{y+a} f(t)\ \mathrm{d}t = a\ell$

c) $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_0^X (f(t+a) - f(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t + a\ell$

d) $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_0^X (\arctan(t+1) - \arctan t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$

10) On cherche à comparer e^x avec son développement limité :

a) $\exists \theta \in \,]0,1[\,, \forall n \in \mathbb{N}, e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}^-, \forall n \in \mathbb{N}, e^x \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$

11) Soit a et b deux fonctions réelles à valeurs strictement positives de la variable réelle x et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $a(x) \underset{\alpha}{\sim} b(x)$.

a) Il existe une fonction ε définie sur un voisinage de α avec $\lim\limits_{x\to\alpha} \varepsilon(x) = 0$ et $\ln(a(x)) = \ln(b(x)) + \ln(1+\varepsilon(x))$

b) $\ln(a(x)) \underset{\alpha}{\sim} \ln(b(x))$

c) $\ln\left(1+\dfrac{x}{2}+\sin^2 x\right) \underset{0}{\sim} \ln(1+x)$ car $1+\dfrac{x}{2}+\sin^2 x \underset{0}{\sim} 1+x$

d) $\ln(|\sin x|) \underset{0}{\sim} \ln(|x|)$ car $|\sin x| \underset{0}{\sim} |x|$ et que $|x| \neq 1$ sur un voisinage de 0

12) Quelques limites en utilisant des équivalents :

a) Pour $\beta \neq 0$ et α réels $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x} = -\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$

b) Pour $\beta \neq 0$ et α réels $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x} = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\tan\dfrac{3x}{2}\right)^{\tan(3x)} = e^{-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\tan\dfrac{3x}{2}\right)^{\tan(3x)} = e$

13) Soit la fonction réelle f de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \neq 0, f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}} \text{ et } f(0) = 0.$$

a) f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, non dérivable en 0

b) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{2-x}{x^3} e^{\frac{x-1}{x^2}}$

c) Sur $[1, +\infty[$, f ne possède qu'un extremum en 2, puisque

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$$

d) $f(x) = x$ admet deux et seulement deux solutions sur $\mathbb{R}$ car la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe représentative de f

14) Soit la fonction réelle f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$$

a) Aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ on a $\sqrt{x(x+2)} = x\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

b) En $+\infty$, la courbe représentative de f admet la drooite d'équation $y = x+2$ comme asymptote

c) En $-\infty$, la courbe représentative de f admet la drooite d'équation $y = x+2$ comme asymptote

d) En $-\infty$, la courbe représentative de f admet la drooite d'équation $y = x+2$ comme asymptote et la courbe est au-dessus de son asymptote

15) Si f est une fonction continue sur un intervalle réel $[a, b]$, $(a < b)$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right) = \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right) = \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$

c) $\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)} = n e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$

d) $\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$

16) On considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^x 3^{-[x]}\ \mathrm{d}x$ où $[x]$ note la partie entière du réel x.

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto 3^{-[x]}$ admet une limite à droite et à gauche en tout point

b) $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 3\dfrac{1-3^{-n}}{2}$

c) Pour montrer que f admet une limite en $+\infty$, il est suffisant de montrer que $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge

d) f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et majorée par $\dfrac{1}{e\ln 3}$ donc elle admet une limite finie qui est la même que la limite de $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$: $\dfrac{3}{2}$

17) On cherche à déterminer les fonctions g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifiant

$$(P) \quad \forall x > 0, g'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

a) Si g vérifie (P) alors g est de C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $x^2 g'' = g$

b) Comme $x > 0$, on peut poser $x = e^t$ et si $h(t) = g(x(t))$ alors $h'' - h' + h = 0$

c) Les fonctions $g : x \mapsto \sqrt{x}\left[A\cos\left(\sqrt{3}\ln x\right) + B\sin\left(\sqrt{3}\ln x\right)\right]$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ vérifient (P)

d) Comme l'équation différentielle (P) est du second ordre et homogène, l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension 2

18) Si $c > 0$, on cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) : $c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ où f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles admettant des dérivées partielles secondes. On posera $u(x,y) = x + cy$ et $v(x,y) = x - cy$. On notera $g(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$.

a) $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot c$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}$

c) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \dfrac{1}{4c^2}\left[c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$

d) $(x,y) \mapsto e^x\,\mathrm{ch}(cy) + 2$ est une solution de (E)

19) On considère le domaine $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1 \text{ et } x^2+y^2-2y > 0\right\}$ dont on veut calculer l'aire A_D.
Si on note $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

a) $\varphi^{-1}(D) = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{6}, 2\sin\theta < \rho \leqslant 1\right\}$

b) $\varphi^{-1}(D) = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{6}, 2\sin\theta \leqslant \rho \leqslant 1\right\}$

c) $A_D = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{2\sin\theta}^{1} \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6} + 1 - \sqrt{3}$

d) $A_D = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{2\sin\theta}^{1} \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$

20) Soit n et p deux entiers naturels non nuls et x un entier relatif non nul et non égal à 1.

a) $\forall n \geqslant 1, x^{n-1} - 1$ et x sont premiers entre eux en utilisant le théorème de Bezout

b) $\forall n \geqslant 2$, p divise $x^2 - x \ \Leftrightarrow\ p$ divise $x^n - x$ car si p divise un produit ab il divise a ou b (avec a, b entiers naturels)

On cherche l'ensemble U des entiers relatifs x tels que $\forall n \geqslant 2$, 6 divise $x^n - x$

c) $U \subsetneq \{6k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1+6k, k \in \mathbb{Z}\}$

d) $U = \{6k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1+6k, k \in \mathbb{Z}\}$

21) Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). On va dénombrer des parties de E, (X, Y, Z) sur lesquelles on posera certaines contraintes :

   a) Le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cap Y = \emptyset$ est 3^n

   b) Le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cup Y = E$ est 3^n

   c) Le nombre de couples (X, Y) tels que (X, Y) forment une partition de E est 3^n

   d) Le nombre de triplets (X, Y, Z) tels que $X \cup Y = Z$ est 3^n

22) À propos des structures

   a) L'ensemble des polynômes de degrés égaux à n ($n > 1$) pour l'addition usuelle des polynômes est un groupe

   b) L'ensemble des matrices carrés de taille n ($n > 1$) pour la multiplication usuelle des matrices est un corps

   c) L'ensemble des suites convergeant vers 0 pour la multiplication usuelle des suites est un groupe

   d) Si G est un groupe pour une loi T donnée et $a \in G$, l'ensemble $aG = \{aTx, x \in G\}$ est un groupe pour T

23) On considère P un polynôme non nul tel que $P(X^2) - P(X+1)P(X) = 0$.

   a) Si a est une racine de P, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, a^{2n} est encore une racine de P

   b) Si a est une racine de P, $\forall n \in \mathbb{N}$, a^{2^n} est encore une racine de P

   c) Si a est une racine de P, il existe p tel que $a = a^p$

   d) Les racines de P sont des racines de l'unité

24) Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{Z}$.

   a) Si $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux et tels que $\dfrac{p}{q}$ est racine de P alors p divise a_0 et q divise a_n

   b) Si $2X^3 - X^2 - 13X + 5$ admet une racine rationnelle, c'est nécessairement 1, 5, $\dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{5}{2}$

   c) $2X^4 + X^2 + 5X + 5$ admet une racine rationnelle

   d) Si $P = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ avec $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k \in \mathbb{Z}$ alors si P possède une racine rationnelle, elle sera entière

25) Les polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta,\ \forall \theta \in \mathbb{R}$$

   a) $\cos n\theta = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right)^n = \sum\limits_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (\cos\theta)^{n-2k}(1-\cos^2\theta)^{2k}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et peut être choisie à coefficients entiers

   b) Si T_n et $\tilde{T}_n$ sont deux polynômes de Tchebychev alors ils sont égaux car $\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = \tilde{T}_n(x)$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique

   c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1} = 2T_n - X^2 T_{n-1}$ puisque $\cos[(n+1)\theta] = 2\cos(n\theta) - \cos^2\theta \cos[(n-1)\theta]$

   d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(T_n) = n$ et $\exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], T_n = X^n + Q$

26) Racines multiples

   a) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$ possède au moins une racine multiple car $P_n' = P_{n-1}$

   b) $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$ est l'unique polynôme vérifiant $P_n - P_n' = \dfrac{X^n}{n!}$

   c) $\forall n \in \mathbb{N}, nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet 1 comme racine double

   d) Si m est divisible par n alors $\forall a \in \mathbb{C}, X^m - a^m$ est divisible par $X^n - a^n$

27) On se place dans E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$

a) $\forall n \in \mathbb{N}, (1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx)$ est une famille libre

b) $\forall n \in \mathbb{N}, (1, \cos x, \cos^2 x, \ldots, \cos^n x)$ est une famille libre

c) $(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ est une famille liée

d) $\left(1, \arctan x, \arctan \dfrac{1}{x}\right)$ est libre

28) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E

a) Supposons l'existence d'un $x \in F$ et $x \notin G$ alors
$$\forall g \in G, F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E \Rightarrow x + g \in F$$

b) Si la réponse de la question a) si elle est vraie entraîne que $F \cup G$ ne peut être un sous-espace vectoriel de E

c) $F \cup G$ ne peut être un sous-espace vectoriel de E que si $F \subset G$

d) Si $F \subset G$ alors $F \cup G$ sous-espace vectoriel de E

29) Soit H et K deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de K et $a \in H$.

a) $\dim\left(\operatorname{Vect}(e_1 + a, \ldots, e_k + a)\right) < k$

b) $\operatorname{Vect}(e_1 + a, \ldots, e_k + a)$ est supplémentaire à H

c) $\operatorname{Vect}(e_1 + a, \ldots, e_k + a) = K$

d) On peut montrer ici que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins deux supplémentaires

30) E est un espace vectoriel de dimension finie. $f \in L(E)$, ensemble des endomorphismes de E.
Les conditions suivantes sont équivalentes à $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$

a) $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$

b) $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$

c) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \emptyset$

d) $f^2 = f$ (f est un projecteur)

31) E est un espace vectoriel de dimension finie. $f \in L(E)$ tel que
$$\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, f \circ f \circ \cdots \circ f = f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0.$$

a) $\forall x \in E, (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre

b) Si $g \in L(E)$, $\min\{p \in \mathbb{N}, g^p = 0\} \leqslant \dim E$
On supposera pour les deux questions suivantes que $n = \dim E$.

c) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left\{f^{n-1}(x)\right\}$ où x est tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$

d) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-2}(x)\right\}$ où x est tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$

32) Soit $(M, N) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ espace vectoriel des matrices carrées de taille n telles que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, M(i,j) = 1$ et $N(i,i) = 3$, $N(i,j) = 1$ si $i \neq j$

a) $\dim(\operatorname{Ker} M) = n^2 - 1$ et M est inversible si et seulement si $n = 1$

b) $M^p = n^{p-1} M$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$

c) $N^p = n^{p-1} 2^p M$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$

d) $N^p = \left[\dfrac{(3n-2)^p}{n} - (-2)^p\right] M$

33) Soit $n \in \mathbb{N}$. On se place dans $\mathbb{R}_n[X]$ espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n.

a) $\dim \mathbb{R}_n[X] = n$

b) $\forall a \in \mathbb{R}, B_a = (1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et d'ailleurs B_0 en est la base canonique

c) La matrice de passage de B_a à B_0 est la matrice $\left(a^{k-p}\binom{k}{p}\right)_{(k,p)\in[\![1,n]\!]^2}$

d) La matrice de passage de B_0 à B_a est la matrice $\left(a^{k-p}\binom{k}{p}\right)_{(k,p)\in[\![1,n]\!]^2}$

34) Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et vérifiant $f(AB) = f(A)f(B), \forall (A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$.

a) f est un morphisme de groupe pour $M_n(\mathbb{R})$ muni de la multiplication usuelle des matrices

b) $f(O_n) = 0$ et $f(I_n) = 1$ (O_n est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité)

c) Si $\exists p \in \mathbb{N}, A^p = 0$ alors $f(A) = 0$
On rappelle que si $r = \operatorname{rg} A < n$, $\exists J_r \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $J^{n-r} = O_n$, $(P,Q) \in [M_n(\mathbb{R})]^2$ inversibles telles que $A = PJ_rQ$.

d) A inversible $\Leftrightarrow f(A) \neq 0$

35) E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3 dont une base est B et dont on note le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $u = (a,b,c)_B$ un vecteur normé fixé de E et a un scalaire. On définit f_a par $\forall x \in E, f(x) = x + a\langle x, u\rangle u$.

a) f_a est un automorphisme orthogonal si et seulement si $a = -2$

b) f_2 est un automorphisme orthogonal

c) f_{-2} est la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel orthogonal à u

d) f_2 est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par u

36) L'espace **E** est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. L'espace vectoriel associé E est rapporté à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soit D la droite de **E** dont la représentation paramétrique est donnée par : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 1+t \end{cases}$

a) Les coordonnées du point symétrique de $M(a,b,c)$ par rapport à D sont
$$\left(1+\frac{a-2b+c}{6}, 1-\frac{a-2b+c}{3}, 1+\frac{a-2b+c}{6}\right)$$

b) Les coordonnées du point symétrique de $M(a,b,c)$ par rapport à D sont
$$\left(\frac{6-2a-2b+c}{3}, \frac{6-2a+b-2c}{3}, \frac{6-2a-2b+c}{3}\right)$$

c) La droite symétrique par rapport à D de l'axe $(z'Oz)$ a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2-2t \\ z = 2-t \end{cases}$$

d) La droite symétrique par rapport à D de l'axe $(z'Oz)$ a pour équations cartésiennes :
$$\begin{cases} 6-2x-y = 0 \\ y = z \end{cases}$$