

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES
PILOTE DE LIGNE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Le sujet comprend :

- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 12 pages de texte, numérotées de 1 à 12.

CALCULATRICE AUTORISEE

Questions liées: 1 à 16
 17 à 25
 26 à 30

PARTIE I

Dans toute cette partie le corps de base est celui des nombres réels; on désigne par $E(x)$ la partie entière du nombre réel x et par n un entier naturel.

Question 1

Soit un polynôme de degré n à une indéterminée à coefficients entiers de la forme $a_n x^n + \dots + a_0$ avec $a_0 \neq 0$, admettant une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ ou $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{Z}^*$, p et q étant premiers entre eux ou étrangers. On a alors:

- a) p divise a_n et q divise a_0
- b) p et q divisent a_0
- c) p divise a_0 et q divise a_n car q divise $a_n p^n$
- d) p divise a_0 mais pq ne divise pas $a_n a_0$

Question 2

Soit f la fonction polynôme définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - x - 1$

- a) f admet au moins 2 racines réelles car sa dérivée s'annule en 2 points
- b) f admet une racine rationnelle et 2 racines complexes conjuguées
- c) f ne possède aucune racine réelle
- d) f admet 2 racines complexes conjuguées et une racine réelle dans l'intervalle

$$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

Question 3

Soit x un réel quelconque, on peut écrire $\cos(nx)$ sous la forme $P_n(\cos x)$ où P_n est un polynôme à une indéterminée.

- a) de degré $n + 1$ à coefficients entiers relatifs
- b) de degré n à coefficients réels non entiers

- c) de degré n à coefficients entiers relatifs
- d) unique car l'application $\cos$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1,1]$

Question 4

Le polynôme P_n défini dans la question 3 s'écrit pour $n = 0$

- a) $P_0(X) = X$
- b) $P_0(X) = \frac{1}{2}$
et pour $n = 1$
- c) $P_1(X) = 2X^2 - 1$
- d) $P_1(X) = X$

Question 5

On a la relation, pour tout réels a, b

- a) $\cos a \cos b = 2(\cos(a+b) - \cos(a-b))$
- b) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

et la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la question 3 vérifie, pour tout entier n strictement positif.

- c) $P_{n+1}(X) - P_{n-1}(X) = 2XP_n(X)$
- d) $P_{n+1}(X) + P_{n-1}(X) = XP_n(X)$

Question 6

Cette suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que:

- a) $P_n(X) = X^n - C_n^2 X^{n-2}(1-X^2) + \dots + (-1)^k C_n^{2k} X^{n-2k}(1-X^2)^k + \dots$
et P_n est impair si n est pair
- b) le coefficient de X^n est, pour tout entier n non nul,
 $C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^{2k} + \dots = 2^{n-1}$
- c) $P_n(-1) = (-1)^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^*$
- d) $P_n(0) = (-1)^n \forall n \in \mathbb{N}$

Question 7

Pour tout entier n strictement positif les racines x_k de ce polynôme P_n sont:

- a) $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ où k est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$
- b) $\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}$ où k est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$
- c) des réels n'appartenant pas à l'intervalle $[-1, 1]$
- d) les n réels de l'intervalle $] -1, 1[$ définis par $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ où k est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$

Question 8

Supposons $n \geq 2$, on note pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-2$, x_k les racines de P_n et y_k celles de P_{n-1} , on a alors:

a) $x_{k+1} > y_k > x_k$

b) $x_{k+1} > x_k > y_k$

c) $x_k > y_k > x_{k+1}$ car $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{(k+1)\pi}{n} < 0$

et $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{k\pi}{n} > 0$

d) $x_k > y_k > x_{k+1}$ car $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{(k+1)\pi}{n} > 0$

et $\frac{\pi}{2(n-1)} + \frac{k\pi}{n-1} - \frac{\pi}{2n} - \frac{k\pi}{n} < 0$

On considère l'équation différentielle, pour $n \in \mathbb{N}$ (E_n) $y'' + n^2 y = 0$

Question 9

La fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \cos(nx)$

- a) forme une base de l'espace des solutions de (E_n)
- b) est une solution de (E_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$

- c) vérifie l'équation (E_n) uniquement pour $n \in \mathbb{N}^*$
d) vérifie l'équation différentielle $y'' - n^2 y = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Question 10

Si on pose $X = \cos x$ on obtient pour y fonction de x

$$a) \frac{d^2 y}{dx^2} = -X \frac{dy}{dX}$$

$$b) \frac{d^2 y}{dx^2} = \sin^2 x \frac{d^2 y}{dX^2} - \cos x \frac{dy}{dX}$$

et l'équation (E_n) est transformée en l'équation (E'_n) de la forme,

$$c) (1 + X^2) \frac{d^2 y}{dX^2} - X \frac{dy}{dX} + n^2 y = 0$$

$$d) (1 - X^2) \frac{d^2 y}{dX^2} - X \frac{dy}{dX} + n^2 y = 0$$

Question 11

Pour tout n , entier naturel, la fonction polynôme P_n définie à la question 3

- a) est solution de (E_n)
b) est solution de (E'_n) car $(1 + x^2)P''_n(x) - xP'_n(x) + n^2 P_n(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$
c) ne vérifie ni (E_n) , ni (E'_n)
d) vérifie (E'_n) car $\forall x \in [-1, 1] \quad (1 + x^2)P''_n(x) - xP'_n(x) + n^2 P_n(x) = 0$

Question 12

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction polynôme $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} a_{n,k} x^{n-2k}$

Si Q_n est solution de l'équation (E'_n) , définie à la question 10, les coefficients $a_{n,k}$ vérifient pour tout k compris entre 0 et $E\left(\frac{n}{2}\right)$.

- a) $(n - 2k)(n - 2k - 1)a_{n,k} + (n - 2k + 2)(n - 2k + 1)a_{n,k-1} - (n - 2k)a_{n,k} + n^2 a_{n,k} = 0$
b) $a_{n,k} = -\frac{1}{4k} \frac{1}{n-k} (n - 2k + 2)(n - 2k + 1)a_{n,k-1}$

$$\begin{aligned} \text{c) } a_{n,k} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k \\ \text{d) } a_{n,k} &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k a_{n,0} \end{aligned}$$

Question 13

Pour tout entier naturel n , le polynôme P_n défini à la question 3 est donc de la forme:

$$\begin{aligned} \text{a) } P_n(X) &= \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{(-1)^k}{n-k} n 2^{n-2k-1} C_{n-k}^k X^{n-2k} \\ \text{b) } P_n(X) &= \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^{k-1}}{n-k} n 2^{n-2k-1} C_{n-k}^k X^{n-2k} \\ \text{c) } P_n(X) &= \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-2k-1} C_{n-k}^k X^{n-2k+1} \\ \text{d) } P_n(X) &= \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-2k-1} C_{n-k}^k X^{n-2k} \end{aligned}$$

Soient p et q , 2 entiers naturels non nuls premiers entre eux (ou étrangers), tels que le rationnel $r = \frac{p}{q}$ vérifie $0 < r < \frac{1}{2}$ et $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ désignant l'ensemble des nombres rationnels)

Question 14

On a alors:

$$\begin{aligned} \text{a) } q &= 2 \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q} \\ \text{b) } \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } \pi \frac{p}{q} u + \pi v &= \frac{\pi}{q} \end{aligned}$$

c) $q \geq 3$ et $\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2 tq \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = P_u(\cos(r\pi))$

d) $q \geq 3 \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$ car $\exists v \in \mathbb{Z} \exists n \in \mathbb{N} tq \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = (-1)^v P_n(\cos(r\pi))$

Question 15

La relation $q = 4k$ où k est un entier non nul.

- a) est impossible puisque $q = 2$
- b) est impossible car q est nécessairement impair
- c) peut être réalisée
- d) est impossible car $P_k\left(\cos\left(\frac{\pi}{4k}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$

Question 16

L'égalité $q = h$ entier impair

- a) ne peut être réalisée

Si cette égalité est réalisée on a:

- b) $P_h\left(\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)\right) = -1$
- c) $\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)$ est racine du polynôme P_h .
- d) $\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)$ est racine de $2^{h-1}X^h + \dots + a_{\frac{h-1}{2}}X + 1 = 0$ car P_h a un terme constant nul.

PARTIE II

On désignera par E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$, des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et par F le sous-espace vectoriel des polynômes de E de degré inférieur ou égal à 3.

On considère l'application f qui à tout élément P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par $[f(P)](X) = P(X) - P(X-1)$ et on note f_F la restriction de f à F

Question 17

Le sous-espace vectoriel F est de dimension

- a) 3
- b) 4

et on a :

- c) f est une application linéaire de E dans F
- d) f_F est un endomorphisme de F

Question 18

La matrice M de l'application f_F par rapport aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée de cette application s'écrit :

a) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Question 19

De manière générale, pour des matrices de type (n,p) (n lignes et p colonnes) à coefficients dans le corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on a:

- a) 2 matrices équivalentes sont semblables
- b) 2 matrices équivalentes ont même rang

et lorsque l'on ajoute à la ligne i_o d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ la ligne i_i multipliée par $\lambda \in K$, le rang de cette matrice,

- c) est inchangée
- d) peut être modifié

Question 20

Le rang de l'application f_F

- a) vaut 3 car est égal au nombre de colonnes non nulles de M
- b) est nécessairement inférieur ou égal à 3 car l'espace F est de dimension 3
- c) vaut 2 car il y a 2 colonnes de M linéairement indépendantes
- d) vaut 3 car on peut extraire au plus 3 colonnes ou lignes linéairement indépendantes de M

Question 21

Les sous-espaces vectoriels noyau et image de f_F sont tels que:

- a) $\dim \ker f_F = \dim F - \operatorname{rg} f_F = 2$
- b) $\ker f_F = \mathbb{R}$
- c) la famille de polynômes $(1, X)$ forme une base de $\operatorname{Im} f_F$
- d) $\operatorname{Im} f_F$ est le sous-espace $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2

On considère la famille (A_0, A_1, A_2, A_3) des polynômes de E définie par $A_0 = 1$ et $\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad f_F(A_i) = iA_{i-1}$ avec O racine de A_i .

Question 22

Ces polynômes vérifient:

- a) $0 < \deg A_i \leq 3 \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- b) A_i est divisible par X , $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- c) $A_2(X) = X(X+1)$ et $A_3(X) = X(X+1)(X+2)$
- d) la famille (A_0, A_1, A_2, A_3) forme une base de F

On note B base canonique de F et $\mathcal{A}$ la base de F formée à l'aide des polynômes (A_0, A_1, A_2, A_3) classés par ordre croissant de degré.

Question 23

La matrice de passage P de la base B à la base $\mathcal{A}$ s'écrit:

a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Question 24

La matrice M' de l'application f_F lorsque l'on rapporte F à la base $\mathcal{A}$ s'écrit:

$$\text{a) } M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } M' = PMP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } M' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1}MP$$

Question 25

Soit g l'application définie par $g(X^i) = A_i \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$. On a alors:

- a) g est un endomorphisme injectif mais non bijectif de F
- b) g est un endomorphisme bijectif de F car g transforme une base de F en une base de F

et la matrice G de g par rapport à la base canonique de F vérifie:

$$\text{c) } G = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } G = P$$

PARTIE III

On pose pour tout entier naturel n : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$

Question 26

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que:

- a) $I_0 = 0$
- b) $I_1 = -1$
- c) $I_n - I_{n-1}$ peut être nul pour certaines valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$
- d) $I_n - I_{n-1} > 0 \, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Question 27

Pour tout entier $n \geq 2$ on a la relation:

- a) $I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n+1} I_n$
- b) $I_n = \frac{n}{n-1} I_{n-2}$
- c) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
- d) $I_n = \frac{n+1}{n} I_{n-1}$

Question 28

Le terme général I_n de cette suite s'écrit, pour tout entier naturel n

- a) $I_n = (n+1)I_0$
- b) $I_{2p} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2} \, \forall p \in \mathbb{N}$
- c) $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2} \pi$ et $I_{2p+1} = -\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \, \forall p \in \mathbb{N}$
- d) $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2} \pi$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \, \forall p \in \mathbb{N}$

Question 29

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- a) est strictement croissante
- b) est décroissante et peut être stationnaire
et elle vérifie les inégalités
- c) $I_{2p+1} > I_{2p} > I_{2p-1} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$
- d) $I_{2p+1} < I_{2p-1}$ et $I_{2p} > I_{2p-2} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

Question 30

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- a) est convergente car les suites $(I_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(I_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes
- b) est divergente car les suites $(I_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(I_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite

et pour tout entier naturel n , on a, en introduisant le changement de variable $x = \cos t$

- c) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{2n+1}$
- d) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = -I_{2n}$