2020

CORRIGÉ

MATHEMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE SCIENTIFIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Deux exercices d'application des connaissances de base
- Un problème faisant largement appel aux probabilités.

ÉVALUATION

- Les deux exercices sont de valeur sensiblement égale dans le barème.
- 12 à 14 points sont destinés au problème.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. (a) $T_2(X) = 2XT_1(X) - T_0(X)$ Donc $T_2(X) = 2X^2 - 1$

   Et $T_3(X) = 2XT_2(X) - T_1(X) = 2X(2X^2 - 1) - X$. Donc $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

   (b) Procédons par récurrence double.

   Initialisation T_1 et T_2 sont de degrés 1 et 2.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que T_n est de degré n et que T_{n+1} est de degré $n+1$.
   Alors $2XT_{n+1}$ est de degré $n+2$ et T_n est de degré n. En particulier $\deg(2XT_{n+1}) \neq \deg(T_n)$.
   Donc T_{n+2} est de degré $\max\big(\deg(XT_{n+1}), \deg(T_n)\big) = n+2$.

   Ainsi, par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: T_n est de degré n .

   (c) Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, T_k est de degré k, donc appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.
   La famille $\mathcal{B}' = (T_0, \ldots, T_n)$ est donc libre en tant que famille de polynômes non nuls de degrés 2 à 2 distincts. De plus, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.
   Donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) En appliquant la formule donnée par l'énoncé avec $a = (n+1)x$ et $b = nx$, on obtient
   $2\cos(x)\cos\left((n+1)x\right) = \cos\left((n+2)x\right) + \cos(nx)$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Procédons par récurrence double.

   Initialisation $T_0(\cos(x)) = 1 = \cos(0x)$
   Et $T_1(\cos(x)) = \cos(x) = \cos(1x)$.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ et $T_{n+1}(\cos(x)) = \cos((n+1)x)$.
   Alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(x)) &= 2\cos(x)T_{n+1}(\cos(x)) - T_n(\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \cos((n+2)x) + \cos(nx) - \cos(nx) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \cos((n+2)x) \end{aligned}$$

   Ainsi, par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

3. (a) Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.
   La fonction $t \longmapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$.
   La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc bornée sur $[-1, 1]$. Il existe alors un réel $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall t \in]-1, 1[, \left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}$$

De plus, au voisinage de 1 : $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2(1-t)}}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{1/2}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann.

Par critère d'équivalence de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{M}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ converge.

Par critère de majoration, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| dt$ converge.

Donc par absolue convergence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge.

Par symétrie (remarquons que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est paire), l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \left|\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| dt$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$ converge.

(b) **Symétrie** Pour tout couple (P,Q) de polynômes, $\langle P,Q\rangle = \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \langle Q,P\rangle$

bilinéarité Soit P, Q et R des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et λ un réel.

$$\begin{aligned}
\langle P, Q+\lambda R\rangle &= \int_{-1}^1 \frac{P(t)\big((Q+\lambda R)(t)\big)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t))}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \lambda\int_{-1}^1 \frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \qquad \text{car ces intégrales convergent d'après 3(a)} \\
&= \langle P,Q\rangle + \lambda\langle P,R\rangle
\end{aligned}$$

Donc la fonction $(P,Q) \longmapsto \langle P,Q\rangle$ est linéaire par rapport à sa deuxième variable et par symétrie, bilinéaire.

Positive Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Comme $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale convergente (les bornes sont dans l'ordre croissant), on a bien $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \geqslant 0$.

Définie-positive Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$.

La fonction $t \longmapsto \dfrac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ étant positive et continue sur $]-1,1[$, on a : $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$. Alors $\forall t \in]-1,1[$, $P(t) = 0$. Le polynôme P admet une infinité de racines, il est donc nécessairement nul.

Donc $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \end{array}$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) D'après le rappel de l'énoncé, $\cos(mx)\cos(nx) = \dfrac{1}{2}\big(\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\big)$.
En intégrant, sachant que $m+n \neq 0$ et $m-n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2(m+n)}\sin\big((m+n)x\big) + \frac{1}{2(m-n)}\sin\big((m-n)x\big)\right]_0^\pi \\ &= \frac{\big(\sin\big((m+n)\pi\big) - \sin\big(m+n)0\big)\big)}{2(m+n)} + \frac{\big(\sin\big((m-n)\pi\big) - \sin\big((m-n)0\big)\big)}{2(m-n)}\end{aligned}$$

Or $\sin\big((m+n)\pi\big) = 0$ et $\sin\big((m-n)\pi\big) = 0$.

Donc $\displaystyle\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = 0$.

(d) La fonction $\varphi : x \mapsto \cos(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement décroissante, bijective de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$.
On peut donc réaliser le changement de variable $t = \cos(x)$ dans l'intégrale, qui ne change ni la nature ni la valeur :

$$\langle T_n, T_m\rangle = \int_0^\pi \frac{T_n(\cos(x))T_m(\cos(x))}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}\sin(x)\mathrm{d}x.$$

Or $\forall x \in [0,\pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$, donc $\sqrt{1-\cos^2(x)} = |\sin(x)| = \sin(x)$.
Ainsi $\langle T_n, T_m\rangle = \displaystyle\int_0^\pi \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x$.

Donc $\forall (n,m) \in \mathbb{N}, n \neq m$, $\langle T_n, T_m\rangle = 0$.

(e) Par le même changement de variable, si $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\|T_n\|^2 &= \int_0^\pi \cos^2(nx)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{\cos(2nx)+1}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2nx)}{2n} + x\right)\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2n\pi)}{2n} + \pi\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, par le même changement de variable

$$\|T_n\|^2 = \int_0^\pi \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Ainsi si $n \geqslant 1$, $\|T_n\|^2 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\|T_0\|^2 = \pi$.

(f) Ainsi, d'après la question 1c, la famille $\left(\dfrac{T_0}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{T_1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \ldots, \dfrac{T_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et d'après la question 3d, elle est orthogonale et d'après la question 3e, elle est normée.

Donc $\left(\dfrac{T_0}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}T_1, \ldots, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}T_n\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. (a) En utilisant l'écriture d'un vecteur dans la base orthonormée précédente :

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle X^n, \frac{T_k}{\|T_k\|} \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|}$$

Donc par linéarité du produit scalaire, $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle X^n, T_k\rangle}{\|T_k\|^2} T_k$.

(b) D'après le théorème de caractérisation de la distance par le projeté orthogonal, ($\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie), $d_n = \|X^n - \pi(X^n)\|$ où $\pi(X^n)$ est le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Remarquons que par construction, $\left(\dfrac{1}{\|T_0\|}T_0, \ldots, \dfrac{1}{\|T_{n-1}\|}T_{n-1}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc on sait que :

$$\pi(X^n) = \sum_{k=0}^{\textbf{n-1}} \frac{\langle X^n, T_k\rangle}{\|T_k\|^2} T_k.$$

Alors $X^n - \pi(X^n) = \dfrac{\langle X^n, T_n\rangle}{\|T_n\|^2} T_n$, donc $d_n = \dfrac{|\langle X^n, T_n\rangle|}{\|T_n\|}$.

(c) Remarquons que $X^2 = \dfrac{T_2}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Or $T_0 = 1$ est orthogonal à T_2. Donc $\langle X^2, T_2\rangle = \dfrac{1}{2}\|T_2\|^2 + \dfrac{1}{2}\langle 1, T_2\rangle = \dfrac{1}{2}\|T_2\|^2$.

Ainsi $d_2 = \dfrac{\|T_2\|}{2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

EXERCICE 2

1. (a) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(b) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $k \geqslant 2$. On a : $\forall t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$.

Par positivité de l'intégrale sur $[k-1, k]$, les bornes étant dans l'ordre croissant, $\dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

De même, on a $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$.

Par positivité de l'intégrale sur $[k, k+1]$, les bornes étant dans l'ordre croissant, $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$.

Donc $\forall k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

(c) Soit $n \geqslant 1$, et soit $N \geqslant n+1$.
En sommant l'inégalité précédente pour $k \in [\![n+1, N]\!]$, avec la relation de Chasles :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$$

autrement dit :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{n}^{N}$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n}t^{\alpha-1}\right)$$

Par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$ chacun des termes admettant bien une limite finie, :

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Donc $\dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

(d) En multipliant par $(\alpha-1)n^{\alpha-1}$ qui est strictement positif,

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leqslant (\alpha-1)n^{\alpha-1}R_{1,n} \leqslant 1$$

Par encadrement, ($\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} = 1$), on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\alpha-1)n^{\alpha-1}R_{1,n} = 1$.

Donc $R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

(e) Par critère d'équivalence de séries à termes positifs (avec la série de Riemann de paramètre $\alpha - 1$), $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} R_{1,n}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.

(f) On peut conjecturer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p si et seulement si $\alpha > p$.

2. (a) Remarquons que $\forall n \geqslant 2$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n^n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

(b) Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $k \geqslant n+1$, $k \geqslant 3$, donc $0 \leqslant \frac{1}{k^k} \leqslant \frac{1}{3^k}$.

Or, la série (géométrique) de raison $\frac{1}{3}$ converge ainsi que la série $\sum u_k$.
Alors en sommant de $n+1$ à $+\infty$:

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3^{n+1}}$.

Donc $0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}$.

(c) Comme $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{3^n}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{3}$), par comparaison de séries à termes positifs on en déduit que $\sum_{n \geqslant 0} R_{1,n}$ converge, donc $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2.
Par la même sommation que précédemment, on obtient que

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

Donc $0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4 \times 3^n}$.

(d) Procédons par récurrence sur p.

◇ D'après les question b) et c), $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 1 et 2.

De plus, pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2^1} \times \frac{1}{3^n}$ et $0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{3^n}$.

◇ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p} \times \frac{1}{3^n}$.

Alors par comparaison à une série géométrique, $\sum_{n \geqslant 1} R_{p,n}$ converge, donc $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre $p+1$. De plus, par le calcul précédent, pour $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leqslant \frac{1}{2^p} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

Ou encore

$$0 \leqslant R_{p+1,n} \leqslant \frac{1}{2^{p+1}} \times \frac{1}{3^n}.$$

Ainsi pour tout entier p, $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p} \times \frac{1}{3^n}$.

(e) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 3 : 0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \dfrac{1}{6^n}$.

Or la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{6^n}$ converge ($|1/6| < 1$).

Par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} R_{n,n}$ converge.

3. (a) Soit n un entier naturel.

Pour tout réel t de $[0,1]$, $1+t \geqslant 1$, donc $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$.

Par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t$ ou encore $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, Donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$.

(b) Rappelons que $\forall n \in [\![0, N]\!]$, $\dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-t)^n \mathrm{d}t$.

Or, $\forall t \in [0,1]$, $-t \neq 1$, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-t)^n = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}$.

Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)}\mathrm{d}t$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

(c) D'après la question 3.a, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t = 0$. Or la suite $\left((-1)^N\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t = 0$.

Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$.

De plus,pour tout entier n, $R_{1,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et pour tout $n \geqslant 0 : R_{1,n} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

(d) Procédons par récurrence

- $\diamond$ D'après la question précédente, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 1 et pour tout $n \geqslant 0$, $R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{(1+t)^1}\mathrm{d}t$.
- $\diamond$ Soit $p \geqslant 1$, supposons que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout entier $n \geqslant 0$, on ait : $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t$.
  Alors, pour $N \geqslant 0$, par sommation géométrique
  $$\sum_{n=0}^{N} R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p}\sum_{n=0}^{N}(-t)^n\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \times \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$
  Donc
  $$\sum_{n=0}^{N} R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+p+1}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t.$$
  Par le même argument d'encadrement que précédemment, $\int_0^1 \frac{(-t)^{N+p+1}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sum_{n\geqslant 0} R_{p,n}$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}$ et pour tout entier N : $\sum_{n=N+1}^{+\infty} R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{N+p+1}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t$.

Ainsi $\forall p \geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et pour tout $n \geqslant 0$: $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t$.

PROBLEME

Partie A - Définition par $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

1. $[N_t = 0] = [S_0 \leqslant t] \cap \bigcap_{n\geqslant 1} [S_n > t]$.
   Or $S_0 = 0$ et $t > 0$. Et pour tout entier n non nul, X_n est une variable aléatoire positive.
   Donc $(S_{n-1} > t) \subset (S_n > t)$. Ainsi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [S_n > t] = [S_1 > t]$.
   Or $S_1 = X_1$.
   $$\text{Donc } P(N_t = 0) = P(X_1 > t) = 1 - P(X_1 \leqslant t)$$
   Or X_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   Ainsi $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$.
2. $(\Longrightarrow)$ Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   Alors
   $$P(X \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Et $P(\lambda X \leqslant t) = P\left(X \leqslant \dfrac{t}{\lambda}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

Ainsi, λX suit la loi $\gamma(1)$.

($\Longleftarrow$) Réciproquement, si λX suit la loi $\gamma(1)$.

Alors $P(\lambda X \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

Or $P(X \leqslant t) = P(\lambda X \leqslant \lambda t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

Donc X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Ainsi X suit la loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si λX suit la loi γ de paramètre 1.

3. Pour tout entier k non nul, λX_k suit une loi $\gamma(1)$.
Et les variables aléatoires X_k sont indépendantes. Donc les λX_k sont indépendantes.
Alors par stabilité de la loi gamma, λS_n suit la loi $\gamma(n)$.

Donc une densité de λS_n est $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$

4. Par définition, $[N_t \geqslant n] = [S_n \leqslant t]$.

5. Remarquons que $[N_t \geqslant n] = [N_t = n] \cup [N_t \geqslant n+1]$, et cette réunion est disjointe.

$$\begin{aligned} P(N_t = n) &= P(N_t \geqslant n) - P(N_t \geqslant n+1) = P(S_n \leqslant t) - P(S_{n+1} \leqslant t) \\ &= P(\lambda S_n \leqslant \lambda t) - P(\lambda S_{n+1} \leqslant \lambda t) \\ &= \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} \mathrm{d}u - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier n non nul et pour tout réel t positif, $P(N_t = n) = \displaystyle\int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} \mathrm{d}u - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} \mathrm{d}u$

6. Soit $f : u \longmapsto \dfrac{u^n}{n!}$ et $g : u \longmapsto -e^{-u}$. Les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \lambda t]$.
Alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} \mathrm{d}u &= \int_0^{\lambda t} f(u) g'(u) \mathrm{d}u \\ &= \Big[f(u) g(u) \Big]_{u=0}^{\lambda t} - \int_0^{\lambda t} f'(u) g(u) \mathrm{d}u \\ &= -\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Donc
$$P(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} \mathrm{d}u - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} \mathrm{d}u = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Ainsi, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

7. (a)
```
function S = simulation_S(n,lambda)
    S = 0
    for i = 1:n
        S = S + grand(1,1,"exp",lambda);
    end
endfunction
```
(b)
```
function N = simulation_N(t,lambda)
    N = grand(1,1,"poi",lambda*t)
endfunction
```
(c)
```
function L = evolution_N(t,lambda)
    L = []
    S = grand(1,1,"exp",lambda)
    while S <= t
        L = [L,S]
        S = S + grand(1,1,"exp",lambda)
    end
endfunction
```
(d)

Réponse i)

(e) On lit $N_{3,2} = 3$ et $N_{5,5} = 5$. On lit $S_2 \approx 2,1$ et $X_4 \approx 0,7$.

Partie B - Définition par $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$

8. Propriétés élémentaires.

(a) Par définition $p_0(0) = P(N_0 = 0) = 1$.

(b) D'après la propriété (H_3), $N_{t+h} - N_t$ et N_h ont même loi.
Donc $P(N_{t+h} - N_t \geqslant 0) = P(N_h \geqslant 0) = 1$, car N_h est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Ainsi $P(N_{t+h} - N_t \geqslant 0) = 1$.

9. (a) $N_{t+h} = N_t + (N_{t+h} - N_t)$.
Or N_t est positive et d'après la question précédente, $P(N_{t+h} - N_t \geqslant 0) = 1$.
Donc
$$p_0(t+h) = P(N_{t+h} = 0) = P([N_t = 0] \cap [N_{t+h} - N_t = 0]).$$
D'après la propriété (H_3), N_t et $N_{t+h} - N_t$ sont indépendantes, donc
$$p_0(t+h) = P(N_t = 0)P(N_{t+h} - N_t = 0).$$
D'après la propriété (H_3), $N_{t+h} - N_t$ et N_h ont même loi
$$p_0(t+h) = P(N_t = 0)P(N_h = 0) = p_0(t)p_0(h).$$
Finalement $p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h)$.

(b) D'après l'hypothèse (H_2), si $h > 0$, $p_0(h) < 1$.
Donc $p_0(t+h) \leqslant p_0(t)$.

Ainsi, p_0 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(c) **Initialisation** D'après la question 8(a), $p_0(0) = 1 = (p_0(s))^0$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $p_0(ns) = (p_0(s))^n$.
D'après la question 9(a), comme ns et s dans $\mathbb{R}^+$,

$$p_0((n+1)s) = p_0(ns+s) = p_0(ns)p_0(s) = \underbrace{(p_0(s))^n}_{\substack{\text{d'après l'hypothèse}\\ \text{de récurrence}}} p_0(s) = (p_0(s))^{n+1}.$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, p_0(ns) = (p_0(s))^n$.

En prenant $s = \dfrac{m}{n}$,

$$p_0\left(n\frac{m}{n}\right) = \left(p_0\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n.$$

En composant par la fonction $u \mapsto u^{1/n}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ ainsi

$$(p_0(m))^{1/n} = p_0\left(\frac{m}{n}\right).$$

Or $p_0(m \times 1) = (p_0(1))^m$.

Ainsi $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(p_0(1))^{m/n} = p_0\left(\dfrac{m}{n}\right)$.

(d) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres rationnels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant t \leqslant v_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = t.$$

D'après la question précédente, pour tout entier n, $p_0(u_n) = e^{u_n \ln(p_0(1))}$ et $p_0(v_n) = e^{v_n \ln(p_0(1))}$.
Posons $\lambda = -\ln(p_0(1))$. Alors $\lambda > 0$.
Et par continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} p_0(u_n) = \exp(-\lambda t) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} p_0(v_n) = \exp(-\lambda t)$$

Or p_0 est décroissante. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_0(v_n) \leqslant p_0(t) \leqslant p_0(u_n)$.

Par encadrement, $p_0(t) = \exp(-\lambda t)$.

10. Loi de N_t.

(a) Rappelons que $e^u \underset{0}{=} 1 + u + o(u)$. Or $\lim\limits_{h\to 0} -\lambda h = 0$.

Donc $p_0(h) = \exp(-\lambda h) = 1 - \lambda h + o(h)$.

(b) ◇ Comme $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\Big([N_h = 0], [N_h = 1], [N_h \geqslant 2]\Big)$ est un système complet d'événements.

◇ Par définition $p_1(h) = P(N_h = 1)$.
Or $P(N_h = 0) + P(N_h = 1) + P(N_h \geqslant 2) = 1$.
Donc $p_1(h) = 1 - P(N_h = 0) - P(N_h \geqslant 2) = 1 - p_0(h) + o(h)$, car $P(N_h \geqslant 2) \underset{h \to 0^+}{=} o(h)$.
D'après la question précédente, $p_1(h) \underset{h \to 0^+}{=} 1 - (1 - \lambda h) + o(h)$.

Ainsi $p_1(h) \underset{h \to 0^+}{=} \lambda h + o(h)$.

(c) Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= P(N_{t+h} = n) \\ &= P\big([N_{t+h} = n] \cap [N_h = 0]\big) + P\big([N_{t+h} = n] \cap [N_h = 1]\big) + P\big([N_{t+h} = n] \cap [N_h \geqslant 2]\big). \end{aligned}$$

Or $N_{t+h} = N_h + (N_{t+h} - N_h)$. Donc

$$p_n(t+h) = P\big([N_{t+h} - N_h = n] \cap [N_h = 0]\big) + P\big([N_{t+h} - N_h = n-1] \cap [N_h = 1]\big) + P\big([N_{t+h} = n] \cap [N_h \geqslant 2]\big).$$

Par indépendance de $N_{t+h} - N_h$ et N_h, (en supposant $h < t$ et $t > 0$ et en remplaçant dans (H_3) l'indépendance supposée par $N_t + h - N_t$ et N_s sont indépendantes pour tout $s \leqslant t$))

$$p_n(t+h) = P(N_{t+h} - N_h = n)P(N_h = 0) + P(N_{t+h} - N_h = n-1)P(N_h = 1) + P([N_{t+h} = n] \cap [N_h \geqslant 2]).$$

Comme $N_{t+h} - N_h$ et N_t suivent la même loi,

$$p_n(t+h) = P(N_t = n)P(N_h = 0) + P(N_t = n-1)P(N_h = 1) + P([N_{t+h} = n] \cap [N_h \geqslant 2]).$$

Donc

$$p_n(t+h) = p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) + P([N_{t+h} = n] \cap [N_h \geqslant 2]).$$

Enfin $[N_{t+h} = n] \cap [N_h \geqslant 2] \subset [N_h \geqslant 2]$. Donc

$$0 \leqslant P([N_{t+h} = n] \cap [N_h \geqslant 2]) \leqslant P(N_h \geqslant 2).$$

Or $P(N_h \geqslant 2) \underset{h \to 0^+}{=} o(h)$. Donc $P([N_{t+h} = n] \cap [N_h \geqslant 2]) \underset{h \to 0^+}{=} o(h)$.

Ainsi $p_n(t+h) \underset{h \to 0^+}{=} p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) + o(h)$.

(d) D'après la question 10a), $p_0(h) \underset{h \to 0^+}{=} 1 - \lambda h + o(h)$ et d'après la question 10b), $p_1(h) \underset{h \to 0^+}{=} \lambda h + o(h)$.
Donc $p_n(t+h) \underset{h \to 0^+}{=} (1 - \lambda h)p_n(t) + \lambda h p_{n-1}(t) + o(h)$.
Alors $p_n(t+h) - p_n(t) \underset{h \to 0^+}{=} h\,(\lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t)) + o(h)$.
Ainsi $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = \lambda\,(p_{n-1}(t) - p_n(t))$.
Donc p_n est dérivable à droite en t.
On admettra la dérivabilité à gauche.

Ainsi p_n est dérivable (à droite) en t et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $p_n'(t) = \lambda\,(p_{n-1}(t) - p_n(t))$

(e) La fonction q_n est dérivable comme produit de fonctions dérivables.
Et $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ q_n'(t) = \lambda e^{\lambda t} p_n(t) + e^{\lambda t} p_n'(t) = e^{\lambda t}(\lambda p_n(t) + p_n'(t)) = e^{\lambda t} p_{n-1}(t) = q_{n-1}(t)$.

Donc q_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ q_n'(t) = q_{n-1}(t)$.

(f) **Initialisation** $q_0(t) = e^{\lambda t} p_0(t) = 1 = \dfrac{(\lambda t)^0}{0!}$ avec la question 9(d).

Hérédité Soit n un entier. Supposons que $q_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ q_{n+1}'(t) = \lambda q_n(t)$.

Donc $q_{n+1}'(t) = \lambda \times \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$.

Donc en intégrant selon t, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+, q_{n+1}(t) = \dfrac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} + K$.

Or $q_{n+1}(0) = p_{n+1}(0) = K$ et $p_{n+1}(0) = P(N_0 = n+1) = 0$ car $N_0 = 0$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+, q_{n+1}(t) = \dfrac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}, q_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$.

(g) D'après la question précédente, pour tout $t > 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $P(N_t = n) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$.
De plus $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$.

Donc N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

11. (a) Par définition, $S_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+,\ N_t = 0\}$.
Or $N_0 = 0$. Donc 0 est le plus petit élément de $\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t = 0\}$. Ainsi $S_0 = 0$.

(b) $[S_1 > t] = [N_t = 0]$.

(c) Ainsi, $P(S_1 \leqslant t) = 1 - P(S_1 > t) = 1 - P(N_t = 0)$.
Or N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt. Donc $P(S_1 \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$

(d) S_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.Par définition de S_n :

$$\big(S_n \leqslant t\big) = \big(N_t \geqslant n\big)$$

On accepte le fait que (S_n) est croissante (pour le démontrer facilement, prendre plutôt comme définition $S_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+,\ N_t \geqslant n\}$).
Ainsi, si un entier k vérifie $S_k \leqslant t$, on a bien par croissance $k \leqslant n$, donc N_t majore $\{k \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant t\}$.
De plus, comme $S_n \leqslant t$, on a $n \in \{k \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant t\}$, donc $n = N_t$ est bien le maximum de $\{k \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant t\}$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leqslant t\}$.

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Avec une moyenne de 11,00 et un écart-type de 5,31, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Rappelons quelques consignes élémentaires avant d'aborder un sujet de concours :

- Il est important en début d'épreuve de lire attentivement l'ensemble du sujet afin de bien comprendre les démarches de chaque exercice ou problème, mais aussi pour déterminer par quel exercice commencer.
- Une présentation correcte est attendue avec un respect de la numérotation de l'énoncé et un respect des règles élémentaires de grammaire (accord des verbes et des adjectifs en particulier) et d'orthographe (par exemple : parmi s'écrit sans 's'). Cette année, trop de copies étaient difficilement lisibles et peu compréhensibles, non à cause du scanner mais bien en raison d'un graphisme et d'une présentation peu soignés. Quand le correcteur ne peut distinguer un « n » d'un « x » ou d'un « m », il considère que la résolution est fausse.
- Une bonne connaissance des notions et des résultats fondamentaux est un pré-requis indispensable. Il peut être demandé de prouver certains résultats de cours, les verbes « prouver », « démontrer », « montrer » sont alors employés et à bien distinguer des verbes « justifier » ou « rappeler ».
- Lors de la correction, une attention particulière est apportée à la rédaction, à l'organisation des arguments, à l'architecture générale du raisonnement. Les hypothèses d'un théorème ou d'une proposition doivent être clairement vérifiées ou rappelées au minimum.
- Toute tentative d'aménager les calculs ou d'obtenir par une pirouette le résultat annoncé est lourdement sanctionnée. Certains candidats n'hésitent pas à « bluffer », généralement de façon très grossière, pour arriver au résultat donné dans l'énoncé. Le jury n'est pas dupe et cette stratégie a été sévèrement sanctionnée. Nous encourageons donc les futurs candidats à composer avec honnêteté.

Il est apparu cette année lors de la correction des copies :

- que la plupart des copies sont claires, agréables à lire et ont leurs résultats mis en valeurs par un encadrement ou un soulignement. Les quelques copies mal présentées n'en ressortent que plus négativement.
- que la numérotation des questions est en général bien respectée. Cependant quand elle ne l'est pas, les copies sont pénibles à corriger et il est compliqué de savoir à quelle question répond le candidat et donc à quelle question attribuer les points. Il est toujours appréciable quand le candidat précise qu'il admet telle ou telle question.

- que certains candidats ne semblent pas maîtriser l'orthographe élémentaire (conjugaison des verbes usuels, confusion infinitif-participe passé, accords en genre et en nombre des participes passés et adjectifs). Bien que le barème n'en tienne pas compte, cela laisse une impression négative au correcteur et ne joue donc pas en faveur du candidat.

- que les calculs en « zig-zag », très difficiles à suivre apparaissent de plus en plus fréquemment. Si le correcteur est perdu, il lui est difficile d'attribuer des points à un calcul ! Il est apprécié d'indiquer les transformations apportées ligne à ligne. Une flèche avec une petite explication suffit souvent.
- qu'un nombre important de candidats se contente de commenter et d'expliquer ce qu'il faudrait faire au lieu de le faire effectivement.
  Par exemple, on a pu lire plusieurs fois « En utilisant les propriétés de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$, on montre que ... »
- que trop de candidats utilisent dans certaines questions des résultats d'autres parties, pourtant indépendantes, comme dans les trois séries de l'exercice 2 ou les deux parties du problème. On ne peut que conseiller aux candidats de passer quelques instants à analyser la structure de l'énoncé.
  D'autres candidats au contraire démontrent de nombreuses fois un même résultat (notamment à l'exercice 2 question 2 pour le calcul de la somme des restes d'une série géométrique) et n'utilisent pas les questions précédentes.

Certains incorrections mathématiques pourraient facilement éviter avec un peu d'attention.
En particulier, nous signalons ci-dessous :

- les confusions entre les inégalités strictes et larges.
  C'est parfois sans grande conséquence, mais cela nuit souvent à la qualité et à la précision de la copie. Par exemple indiquer « $\sqrt{1-t} > 0$ pour $t \in [-1, 1]$ » pour ensuite diviser par $\sqrt{1-t}$ sur $[-1, 1]$.
  De la même manière, il est parfois écrit que pour un polynôme P, on a : $\forall t \in [-1, 1], \; P^2(t) > 0$, avant d'étudier le cas où $\forall t \in [-1, 1], \; P(t) = 0$.
- une mauvaise utilisation des quantificateurs.
  Les quantificateurs pourraient être un peu plus souvent utilisés et surtout à bon escient. En particulier la phrase « $\forall x \in \mathbb{R}$, f est croissante sur $\mathbb{R}$ »montre une incompréhension des quantificateurs
- Un usage approprié du vocabulaire.
  De trop nombreux candidats confondent les termes généraux des séries de référence, notamment les séries de Riemann et les séries géométriques.
- Un abus d'équivalence.
  L'emploi systématique d'équivalences, souvent à mauvais escient, est à déplorer dans certaines copies.
  Par exemple l'équivalence « $f \geqslant 0$ sur $[a, b] \iff \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, par croissance de l'intégrale » est fausse.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice a pour but d'étudier les polynômes de Tchebychev et de prouver son orthogonalité pour un certain produit scalaire et enfin de déterminer la distance du polynôme X^n (de la base canonique) à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. (a) Cette question est en général bien traitée sauf par quelques uns pour lesquels le développement du produit $2X(2X^2-1)$ est hasardeux.
   C'est aussi parfois la recopie erronée de T_2 qui entraîne une erreur dans T_3.
   Des telles erreurs à la première question de l'épreuve ne devraient pas arriver... Nous ne pouvons que conseiller aux candidats de porter une attention particulière à ces premières questions.

   (b) Une récurrence double était indispensable ici. De nombreux candidats font une récurrence simple et utilisent sans complexe une double hypothèse sur n et $n+1$.
   Quand la récurrence double est invoquée, il arrive que l'initialisation soit simple. Dans la partie hérédité du raisonnement, une justification soigneuse du degré de T_{n+1} est attendue. L'utilisation de la règle « $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ » doit être associée à une discussion sur les degrés de P et de Q.

   (c) On trouve trop d'occurrences de la « dimension de $(T_0, \ldots, T_n)$ ». C'est une confusion qui a été systématiquement sanctionnée.
   On retrouve parfois l'argument (erroné) suivant : « $(T_0, \ldots, T_n)$ possède $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs, donc est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ ».
   L'argument de *maximalité* d'une famille libre est parfois utilisé, et jamais à bon escient. Nous ne recommandons donc pas son usage, mal compris par les candidats.

2. (a) Une récurrence à cette question est très mal venue, surtout quand l'hérédité n'utilise pas l'hypothèse de récurrence.
   Lorsque le candidat utilise la formule donnée avec $a = x$ et $b = (n+1)x$, il manque souvent l'argument de la parité de cos pour aboutir à la formule demandée.

   (b) Certains candidats pensent à faire une récurrence double ici quand ils ne l'ont pas faite à la question 1(b). Il serait souhaitable de prendre quelques secondes pour analyser les démarches entreprises.

3. (a) Si la continuité est en général bien vérifiée, la positivité n'est pas toujours vérifiée dans le cas d'utilisation du critère d'équivalence.
   Les équivalents donnés sont souvent faux : $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ ou encore $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t^2}}$.
   Mener entièrement les deux études en 1 et en -1 n'est pas utile. Mieux vaut conclure par un « de même », ou remarquer que le problème est symétrique, ou indiquer que l'on procède de même en opérant le changement de variable $u = -t$.
   La fonction arcsin n'est pas au programme et ne pouvait être utilisée pour établir la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, du moins pas sans donner de sérieuses explications.
   Les candidats ayant traité correctement cette question ont trouvé de nombreuses manières d'y répondre : prolongement par continuité dans le cas où P où Q admettent 1 comme racine avec simplification du $\sqrt{1-t}$, changement de variable $t = \cos(x)$, étude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ par équivalence puis

conclusion par linéarité, majoration de $|PQ|$ sur le segment $[-1,1]$ puis étude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$.

D'une manière générale, cette question (relativement bien dotée en points par le barème) n'a été que trop rarement correctement traitée.

(b) Dans beaucoup de copies la linéarité à gauche permet de conclure immédiatement à la bilinéarité, avant de montrer la symétrie. C'est, au mieux, maladroit.

La linéarité des intégrales convergentes a très peu été évoquée.

Le caractère « défini positif » n'a que rarement été correctement établi, avec beaucoup de rédactions bancales. La continuité de l'intégrande a été presque systématiquement omise. L'argument algébrique (un polynôme ayant une infinité de racines est nul) est toutefois souvent fourni. On relève enfin quelques erreurs dans l'ordre des implications (si l'intégrale est positive, alors l'intégrande est positive)

(c) Certains candidats se lancent dans de lourdes manipulations (parfois inabouties !) pour calculer $\sin((n+m)\pi)$, où n et m sont des entiers.

Il s'agit d'une question qui devrait être simple : tout candidat de la voie S espérant être admissible devrait être capable de donner une primitive correcte de $x \mapsto \cos(kx)$, ou de trouver (voire justifier) la valeur de $\sin(p\pi)$ lorsque p est un entier.

On voit peu de préoccupations du fait que $m+n \neq 0$ et $m-n \neq 0$ dans les calculs.

On lit beaucoup de « puisque $n-m \neq 0$, $\sin((n-m)\pi) = 0$ », ce qui indique souvent que le candidat n'a pas identifié clairement la nécessité de l'hypothèse $n \neq m$.

(d) En dehors de la justification du changement de variables, ce calcul comportait deux difficultés principales : d'une part, la gestion des bornes ; d'autre part, la gestion du signe du sinus pour la simplification $\sqrt{\sin^2(x)} = \sin(x)$. Peu de candidats ont géré correctement l'un ou l'autre de ces deux points, les autres ont donc été systématiquement sanctionnés.

Les hypothèses du changement de variable sont rarement bien vérifiées, en particulier il est souvent écrit que $x \longmapsto \cos x$ est bijective de $[-1,1]$ vers $[0,\pi]$ ou encore seulement de $[-1,1]$. (il est important de fournir l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée pour définir une bijection)

(e) Cette question est en général bien traitée. Le fait que le résultat soit donné dans l'énoncé a sans doute aidé les candidats.

Le calcul de $\|T_0\|$ a parfois (mais rarement) été tenté en utilisant les fonctions arcsin ou arccos. Nous rappelons que ces fonctions sont hors programme et que leur usage est extrêmement déconseillé.

(f) Certains candidats invoquent le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, ce qui est un peu osé (dans ce contexte). Le correcteur pense souvent que ceci dissimule une incompréhension de la question et de l'ensemble de l'exercice par le candidat, qui tente de s'en sortir par un coup de « baguette magique ».

Une justification précise est attendue ici en reprenant bien les résultats des questions précédentes et en donnant le numéro des dites questions.

Rappelons que le vecteur $\dfrac{x}{||x||^2}$ n'est pas unitaire en général.

4. (a) La formule donnant l'expression des coordonnées d'un vecteur dans une base *orthogonale* et non orthonormale ne figure pas au programme. La précision de la base orthonormée est attendue.

(b) Certains ont fait le lien avec la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sans toujours l'écrire explicitement, se contentant d'écrire $p_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$. Il a rarement été fait référence à $\left(\frac{T_0}{\|T_0\|}, \ldots, \frac{T_{n-1}}{\|T_{n-1}\|}\right)$ comme base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ afin de justifier l'expression de $p_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}(X^n)$

(c) Question très peu souvent menée à terme, parfois cependant avec pertinence (utilisation de l'écriture de X^2 dans la base orthonormée (T_0, T_1, T_2)) ce qui rendait le calcul rapide.

Exercice 2

Cet exercice porte sur l'ordre de convergence d'une série. Il utilise un grand nombre de propriétés des séries convergentes et de méthodes pour vérifier la convergence d'une série.

Lors de l'étude de la convergence d'une série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ trop de candidats commettent la maladresse (voire l'erreur) d'écrire « [...] donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ vaut [...], donc $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge ».

Dans trop de copies, l'argument erroné suivant est donné : « le terme général tend vers 0, donc la série converge ». Il est dommage de commettre une telle erreur, car cela déconsidère tout ce qui suit et n'encourage pas le correcteur à faire confiance au candidat ultérieurement. De plus, cela constitue un handicap sérieux dans cet exercice car l'erreur est répétée (et donc sanctionnée) à chaque convergence de série.

De nombreux candidats confondent le théorème des encadrements concernant les suites, avec le critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

Lors de l'utilisation d'un critère de comparaison pour une série, la positivité du terme général a été trop souvent oubliée. C'est pourtant un argument fondamental !

Quelques candidats ne semblent maîtriser qu'un seul outil pour établir la convergence des séries (critère de négligeabilité en l'occurrence), ce qui les handicape sérieusement et leur fait souvent perdre du temps.

1. (a) Une grande majorité de candidats reconnaissent une série de Riemann et connaissent la condition sur α. Cependant il reste quelques candidats pour qui cette condition est $\alpha > 0$, $\alpha < 1$,$|\alpha| > 1$ ou $\alpha \geqslant 1$, ou $\alpha \geqslant 2$ (estimant peut-être que α est entier auquel cas la condition $\alpha \geqslant 2$ est équivalente à $\alpha > 1$) ou encore $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

   (b) Question très classique, mais en général pas assez détaillée ni justifiée.
   Une condition sur α est attendue pour justifier la monotonie de $t \mapsto t^\alpha$ ou de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Rappelons que l'égalité suivante $\sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ n'est pas au programme et doit être soigneusement justifiée.
   Les convergences des séries et des intégrales apparaissant ici doivent être rappelées ou justifiées.
   Une somme partielle est différente de la somme de la série (ici, $R_{1,n}$).
   Que $\lim_{N \to +\infty} N^{-\alpha+1} = 0$ doive être justifié avec un argument sur α n'a été remarqué que par de très nombreux candidats.

(d) De nombreuses erreurs dans cette question. Certains candidats ne prennent pas assez de temps pour analyser les objets qu'ils manipulent et ainsi les confondent.
Trop de candidats divisent l'inégalité sans se soucier du signe du terme utilisé pour diviser. Encore une fois, cela reflète souvent les difficultés qu'ont les candidats à comprendre et manipuler les relations de comparaison.

Deux suites peuvent avoir même limite, sans être équivalentes. On ne pouvait donc pas justifier ceci par un simple passage à la limite dans les inégalités.

Rappelons que dans une limite lorsque $n \to +\infty$, il ne peut pas y avoir de n dans le résultat.

(e) On a lu quelques confusions entre convergence de la série de terme général $R_{1,n}$ et convergence de la suite $(R_{1,n})$ pour la convergence à l'ordre 2.

Il est demandé ici de comparer les termes généraux des séries et pas les sommes partielles : on attend un argument concernant $u_n \sim v_n$ mais pas $\sum u_n \sim \sum v_n$

À nouveau à cette question, la positivité des termes généraux est peu vérifiée.

On trouve dans plusieurs copies le passage $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$, et c'est une erreur trop grossière.

(f) Une conjecture souvent proposée est : « $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge à l'ordre n ». Cela n'a pas de sens, et cela reflète aussi les difficultés qu'ont beaucoup de candidats à gérer correctement leurs variables.

Peu de candidats donnent la bonne conjecture : on trouve souvent $\alpha > p$. Quelques bonnes copies évoquent la partie entière de α.

2. Quelques candidats semblent ne pas connaître la formule de sommation géométrique, ce qui est inquiétant au vu de l'importance de cette formule dans le programme des deux années d'ECS. Beaucoup de candidats ont aussi des difficultés à retrouver l'expression du reste d'une série géométrique convergente. On voit souvent que ces candidats procèdent au retranchement d'une somme partielle, ce qui mène à des calculs fastidieux, alors qu'une factorisation du premier terme est bien plus efficace. La plupart des candidats mènent leurs calculs sur les sommes partielles et non sur la somme de la « série reste », ce qui est peu efficace mais nous semble finalement raisonnable, au vu des difficultés et des confusions sur les séries observées dans cet exercice.

(a) Il n'est pas possible de prendre $\alpha = n$ comme paramètre d'une série de Riemann, ce que trop d'étudiants font !

Même type d'erreur, mais plus rare : certains voient $\dfrac{1}{n^n}$ comme le terme général d'une série géométrique, de paramètre n. Il est dommage de trouver de telles erreurs, sur des exemples assez usuels.

Certains comparent avec la série exponentielle, il aurait été souhaitable de bien justifier la comparaison et de s'assure de son exactitude en particulier $\dfrac{1}{n^n} \sim \dfrac{1}{n!}$ est faux.

Plusieurs candidats justifient la convergence par une négligeabilité en évoquant des croissances comparées qui sont loin d'en être, du genre « $n^2 \exp -n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées »..

Le critère de d'Alembert n'est pas au programme.

Enfin, dire que « la série $\sum \dfrac{1}{n^n}$ est décroissante » n'a pas de sens.

(b) Le résultat étant donné, il est ici impératif de détailler le calcul de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$, bien entendu après avoir justifié la convergence de cette somme.

Il est très maladroit de démontrer la majoration $u_k \leqslant \frac{1}{3^k}$ par récurrence, surtout quand l'hypothèse de récurrence n'intervient pas.

De plus, certains qui ont voulu faire une récurrence ont écrit $3^3 = 9$.

(c) Cette question est en général bien réussie.

Cependant, beaucoup de candidats démontrent seulement la majoration et oublient de démontrer la convergence de la série à l'ordre 2 en utilisant les critères de comparaison des séries à termes positifs.

(d) De même dans cette question, seule la majoration est démontrée et pas la convergence de la série à l'ordre p.

Des erreurs de raisonnement dans l'ordre des propriétés démontrées : certains candidats pensent prouver d'abord la majoration du reste, et ensuite la convergence à l'ordre $p+1$ dans l'hérédité, ce qui pose un sérieux problème logique.

On trouve souvent la notation $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{2^p 3^n}$ (ou son équivalent pour la somme de la série), qui n'a aucun sens et pose des problèmes d'interprétation au correcteur.

(e) Trop peu abordent cette question facile.Quelques candidats ont essayé de justifier leur résultat par une convergence à l'ordre n inadéquate ici.

3. (a) Certains candidats ont tenté une inversion intégrale/limite. Signalons encore une fois qu'aucun résultat de ce type n'est au programme.

Quelques candidats ont essayé de procéder par intégration par parties, ce qui était une bonne idée en soi, mais fut rarement concluant. Le premier écueil fut la primitivation de $t \mapsto \frac{1}{1+t}$. Le second fut d'étudier la convergence de la suite de terme général $\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} \mathrm{d}t$.

Cette question a posé des problèmes insurmontables à beaucoup de candidats. L'un de ces problèmes fut la confusion entre la notion de convergence de la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et celle de la « convergence » de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t$, à n fixé. Rappelons que cette dernière intégrale n'a pas lieu d'être étudiée en tant qu'intégrale généralisée, nous nous situons bien dans le cadre de l'intégrale au sens de Riemann, d'une fonction continue sur un segment.

(b) La sommation géométrique n'a que rarement été explicitée et la vérification du fait que la raison soit différente de 1 n'a presque jamais été faite.

(c) Parmi les candidats qui arrivent à démontrer correctement la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et à identifier sa somme, beaucoup ont des difficultés à identifier simplement le reste de cette série. Il leur est donné pourtant une égalité faisant apparaître simultanément une somme partielle et la somme de la série !

(d) Question rarement traitée par les candidats ou mal traitée par ceux qui ont tenté.

Problème

Partie A - Définition par $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

1. Cette question est en général peu traitée et quand elle l'est elle est peu justifiée. Certains ont la bonne intuition $[N_t = 0] = [S_1 > 1]$ sans justification.

   Certains candidats justifient cette question « d'après le graphique » : ce n'est pas un argument accepté.

2. Cette question est assez mal traitée, souvent considérée comme du cours, elle n'est alors pas démontrée. Elle donne lieu à beaucoup de flou, voire de résultats faux ! Beaucoup de candidats n'ont par exemple pas prêté attention à l'équivalence demandée, et n'ont montré qu'une implication.

   On lit dans plusieurs copies la *règle* (complètement erronée) suivante : « si X, Y sont indépendantes, si $x > 0$, $P(X + Y \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x)$ ».

   Il ne semble pas évident à beaucoup de candidats que deux variables aléatoires (à densité) ayant même fonction de répartition aient même loi. Cela entraîne alors des manipulations (parfois lourdes ou erronées) pour retrouver la densité d'une loi exponentielle/gamma.

3. Trop de candidats invoquent la « stabilité de la loi γ par addition », sans rappeler l'hypothèse fondamentale d'indépendance (mutuelle) des variables aléatoires.

   Dans quelques copies, la loi de S_n est correctement donnée, mais pas sa densité, qui est pourtant utilisée par la suite. Nous rappelons qu'il est important de bien lire les questions et d'y répondre précisément.

   La valeur de la densité sur $\mathbb{R}_-$ a parfois été oubliée.

   Rappelons que $\Gamma(n)$ ne vaut pas $\sqrt{n}$ ni $n!$. L'utilisation des fonctions indicatrices n'est pas maîtrisée, on rencontre des expressions $f(x) = \ldots$ sans variable x.

4. Pas mal de bonnes réponses ont été fournies ici. Certains cependant ne voient qu'une inclusion.

5. L'égalité $P(N_t = n) = P(N_t \geqslant n) - P(N_t \geqslant n + 1)$ utile ici est parfois mal donnée, ainsi une justification d'un telle égalité semble nécessaire et permettrait surement à nombre de candidats de la donner correctement. La suite du calcul est en général bien mené

6. Pour réaliser l'intégration par parties, poser les fonctions $u(u) = [...]$ et $v(u) = [...]$ n'était pas la meilleure des idées. Il est important de choisir des noms de variables adéquats.

   Une mauvaise utilisation de parenthèses a entraîné des erreurs chez bon nombre de candidats. Il est regrettable de constater que la factorisation pose encore problème à des élèves détenteurs d'un bac scientifique.

7. La majorité des candidats répondent aux questions d'informatique. On constate des progrès d'année en année et nous ne pouvons que nous en féliciter. Certains candidats glanent beaucoup de points dans cette question, alors que le reste est médiocre. Toutefois, certaines bonnes copies passent cette partie...

   Rappelons que les fonctions `disp` ou `input` n'ont rien à faire dans le corps d'une fonction, dans ce contexte.

   (a) Certains candidats écrivent `U=sum(grand(n,p,"exp",1/lambda))` sans se rendre compte que p n'est pas défini dans le programme.

Voici un morceau de code proposé par plusieurs candidats (avec quelques variations) :

```
function U = simulation_S(n,lambda)
    U=0
    X = grand(1,1,"exp",1/lambda)
    for k = 1:n
        U = U+X
    end
endfunction
```

On peut souligner l'effort entrepris pour réaliser correctement une sommation, on remarquera tout de même que la nécessité de retirer de nouvelles valeurs pour `X` échappe à de nombreux candidats.

La fonction `sum` n'est pas toujours bien maîtrisée, elle est appliquée à des variables qui ne sont pas des tableaux : `U = sum(grand(1,1,"exp",1/lambda))` ne produit pas grand chose de pertinent (d'autres candidats essayant vainement d'introduire des indices dans la fonction `sum`).

(b) Nous tenons à rappeler qu'on ne simule jamais une densité !

(c) Il faut veiller à respecter la syntaxe. On ne doit pas écrire « `S ⩽ t` »mais « `S <= t` »
Beaucoup d'erreurs pour le $S = S + ...$

(d) Des réponses non présentes dans le sujet ont été proposées.Peu de bonnes réponses.

(e) C'est une question élémentaire, que tous les candidats devraient avoir traitée, ce qui fut loin d'être le cas. Il est d'autant plus dommage de voir que certains arrivent à se tromper sur cette lecture graphique ... Le jury n'attendait pas une grande précision dans les lectures graphiques.

Partie B - Définition par $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$

8. (a) Certains candidats, en nombre bien trop nombreux, trouvent 0.

(b) Certains candidats ont utilisé $N_t = \sup\{n, S_n <= t\}$ pour répondre à cette question. Or ce n'était plus d'actualité, signe que ces candidats ne comprennent pas l'architecture du sujet.

9. (a) Le fait que $N_{t+h} - N_t$ a la même loi que N_h ne permet pas d'écrire que $P(N_t + N_{t+h} - N_t = 0) = P(N_t + N_h = 0)$.
Peu de candidats justifient le passage de $[N_{t+h} = 0]$ à $[N_t = 0] \cap [N_{t+h} - N_t = 0]$.

(b) Seule la décroissance était attendue des candidats. Mais pour la plupart des candidats ayant traité cette question, ils ont utilisé spontanément que $P(N_t = 0) > 0$ (cet oubli de l'énoncé n'a donc pas trop gêné les candidats)
Le produit par un nombre positif pour justifier l'inégalité n'est quasiment jamais évoqué.
Rappelons que des intersections de probabilités n'a pas de sens.

(c) Cette question fut peu traitée et rarement de manière correcte.
Certains ne considèrent pas l'indication donnée par l'énoncé ou la transforment en posant $n = \frac{m}{n}$.

(d) Très peu de candidats traitent cette question, souvent avec de très belles résolutions.

10. (a) On lit très peu de bonnes réponses à ce développement limité si simple et classique.
On trouve beaucoup de réponses du type « $p_0(h) = 1 + x + o(x)$ ». Encore une fois, cela révèle bien la difficulté de beaucoup de candidats à gérer correctement leurs variables.
Quelques candidats mélangent les notations $\sim$ et $o(...)$ en écrivant par exemple $p_0(h) \sim 1 - \lambda h + o(h)$.

(b) La définition d'un système complet d'événements n'est pas bien connue par les candidats. Beaucoup essaient notamment de justifier que $P(N_t = 0) + P(N_t = 1) + P(N_t \geqslant 2) = 1$. Rappelons que les sommes d'évènements n'ont pas de sens, tout autant que les réunions de probabilités.

(c) Cette question fut peu traitée par les candidats.

(d) Cette question est peu abordée. Cependant la définition du nombre dérivé est bien connue.
Mais rappelons que ce nombre dérivé est une limite, ainsi le résultat ne doit plus contenir de $o(1)$.

(e) Beaucoup ne mènent pas leurs calculs jusqu'au bout et donc n'aboutissent pas à la formule proposée : c'est dommage lorsque la méthode est bien amorcée.

(f) Peu de copies traitent cette question. Parmi celles qui le font, la question de la constante dans la primitivation de q'_{n+1} est rarement bien traitée.

(g) Cette question assez souvent repérée est alors traitée correctement. Cela doit entraîner de profonds regrets à tous les candidats qui ne l'ont pas abordée !

11. (a) Cette question ne fut abordée que par très peu de candidats.

(b) Cette question est rarement traitée mais souvent bien faite quand elle est abordée.

(c) Cette question ne fut abordée que par très peu de candidats.

(d) Question assez souvent repérée et alors traitée correctement par ces nombreux candidats.
Encore une question qu'aucun étudiant ne devrait ignorer !

(e) Cette question ne fut abordée que par très peu de candidats.