ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2018

prépa

1

Mathématiques

Option Scientifique

Lundi 16 avril 2018 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 6 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

ECRICOME

EXERCICE 1

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique.
Pour toutes matrices colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$.
Pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\|X\| = \sqrt{{}^tXX}$.

On considère u et v deux endomorphismes de E, et on note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique de E.

Partie 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose **dans cette partie uniquement** que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.
2.(a) Vérifier que les endomorphismes u, v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.
  (b) Vérifier que le vecteur $x_0 = (1, a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.
  (c) Déterminer le spectre de $u \circ v$.
3.(a) Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.
  (b) Pour quelle(s) valeur(s) de a, $u \circ v$ est-il un projecteur ?

Partie 2

On revient dans cette partie au cas général, où n désigne un entier tel que $n \geqslant 2$.
On suppose que u et v sont des projecteurs symétriques de E et on pose : $C = BAB$.

4. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$\|BX\|^2 = \langle BX, X\rangle.$$
En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$\|BX\| \leqslant \|X\|.$$
5. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit λ une valeur propre de C et X un vecteur propre associé.
  (a) Exprimer $\|ABX\|^2$ en fonction de λ et $\|X\|$.
  (b) En déduire que les valeurs propres de C sont réelles positives.
7. Soit μ une (éventuelle) valeur propre de AB non nulle, et X un vecteur propre associé.
  (a) Montrer que BX est un vecteur propre de C. En déduire que μ est strictement positive.
  (b) Montrer que : $ABX = \mu AX$. En déduire que : $AX = X$.
  (c) Montrer que : $\langle X, BX\rangle = \mu\|X\|^2$.
8. Déduire des questions précédentes que le spectre de AB est inclus dans $[0, 1]$.

EXERCICE 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y.$$

On pose enfin : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\dfrac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

2.(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Montrer que les seuls points critiques de f sont $(\varphi, \varphi+1)$ et $\left(-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi+1}\right)$.
(c) Étudier la nature des points critiques de f.

3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

4.(a) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geqslant 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

```
function u=suite(n)
  v=0
  w=1
  for k=2:n
    ................
    ................
    ................
  end
  u=................
endfunction
```

(b) Justifier qu'il existe des réels λ et μ, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.$$

(c) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

5. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.
(a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.
(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
(c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

(d) Montrer que : $\varphi = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie 1 - Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une **relation de Panjer** s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\boxed{P(N=0) \neq 1 \quad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(N=k-1).}$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(N=k) = \frac{b^k}{k!} P(N=0).$$
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
   Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \geqslant 2,\ P(N=k) = 0.$$
   (b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times P(Z=k-1).$$
   (b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes en fonction de n et p.

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.
   (a) Calculer $P(N=1)$. En déduire que $a + b \geqslant 0$.
   (b) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$:
   $$\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) P(N=k) + b \sum_{k=0}^{m-1} P(N=k).$$

(c) En déduire que $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.

Préciser alors la valeur de $E(N)$ en fonction de a et b.

(d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que :

$$E(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

(e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $V(N)$ en fonction de a et b.

(f) Montrer que $E(N) = V(N)$ si et seulement si N suit une loi de Poisson.

Partie 2 - Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = P(N=k),$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, la série $\sum_{k\geqslant 0} p_k x^k$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)x^k.$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\frac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \frac{-(a+b)}{a}$.

On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}.$$

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}.$$

7. Soit $x \in [0,1]$.

(a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

(b) Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$, $\frac{x-t}{1-at} \leqslant 1$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que :

$$G(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}.$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier que $G'(1) = E(N)$.

Partie 3 : formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question 4 de la partie 1.

On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$

autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad S(\omega) = 0 \text{ si } N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \text{ sinon.}$$

9. Calculer $P(S=0)$ lorsque $a \in]0,1[$ à l'aide de la partie 2.

10. (a) Calculer $P(S=0)$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

    (b) On considère la fonction Scilab suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```
function y=simulX(n)
  y=0;
  for i=1:n
    if rand()<1/2
      y=y+1;
    end
  end
endfunction
```

    Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

    (c) On rappelle qu'en Scilab l'instruction `grand(1,1,"poi", lambda)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lambda`.

    On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.

    Recopier et compléter la fonction Scilab suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
function s=simulS(lambda,n)
  N = grand(1,1,"poi", lambda)
  ........................
  ........................
  ........................
  ........................
  ........................
endfunction
```

11. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :
$$\forall k \geqslant 0, p_k = P(N = k)$$
et on notera également :
$$\forall k \geqslant 0, q_k = P(X_1 = k).$$
Enfin, on considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$.

    (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad E(X_i | S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}.$$
Indication : on pourra considérer la somme $\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i | S_{n+1} = k)$.

    (b) Justifier que :
$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) P(S_{n+1} = k) = q_j P(S_n = k - j).$$

    (c) Déduire des deux questions précédentes que :
$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S_n = k - j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k).$$

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

    (a) Montrer que :
$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k - j).$$

    (b) Montrer que :
$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

    (c) Justifier que:
$$P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

    (d) En déduire finalement que :
$$P(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j).$$

ECRICOME