écricome

CONCOURS D'ADMISSION 2010

1

Mathématiques

Option Scientifique

Mercredi 21 avril 2010 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":
8 h 00 – 13 h 20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 9 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les intégrales :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} du.$$

1. **Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.**

   (a) Vérifier que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \forall t \in [0,1[, \quad \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

   En déduire que : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

   (b) En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. **Résultats intermédiaires.**

   (a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$.

   (b) Soit k un entier naturel non nul.

   Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1} dx$.

   (c) On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - e^{2x}$.

   A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 appliquée à la fonction f, montrer que :

   $$\forall x \in]-\infty, 0], \quad \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leqslant \frac{3x^2}{2}.$$

3. **Application.**

(a) En utilisant la question **2**, démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \left| v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du \right| \leqslant \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u}du.$$

(b) *On considère l'intégrale* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du$ *que l'on ne cherchera pas à calculer.*

Donner alors un équivalent de v_n puis un équivalent de $u_n - \dfrac{1}{2}$ en fonction de I.

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme :

$$f(P) = P'' - 4XP'.$$

1. Etude de f. Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

   (a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Calculer $f(1)$, $f(X)$ puis $f(X^k)$ pour $k \in \{2, .., n\}$.

   Etablir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.

   (c) Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres est de dimension 1.

   (d) Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
   Etablir que : $\lambda = -4\deg(P)$.

   En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que

   $$(\mathcal{E}_n) : f(H_n) = -4nH_n.$$

   Rappel : *un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut* 1.

2. Etude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) En dérivant la relation $(\mathcal{E}_n)$, démontrer que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad f(H_n') = -4(n-1)H_n'.$$
   En déduire que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad H_n' = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.$$

   (b) Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$?
   Calculer alors H_2 et H_3.

   (c) D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :
   $$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}.$$
   Ecrire un programme en Pascal calculant u_{2010}.

3. Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.
   On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par :
   $$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\right\}$$
   ainsi que la fonction V définie sur U par :
   $$\forall (x,y,z) \in U, \quad V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$
   Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$.

   (a) Etablir que (α,β,γ) est un point critique de V si et seulement si (α,β,γ) est solution du système :
   $$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2\alpha\,(\alpha-\gamma)\,(\alpha-\beta) = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta\,(\beta-\alpha)\,(\beta-\gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma\,(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta) = 2\gamma - \alpha - \beta \end{cases}$$

   (b) On introduit le polynôme $Q(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.
   Montrer que (α,β,γ) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $Q'' - 4XQ'$ admet pour racines α, β, γ.

   (c) Prouver que si (α,β,γ) est un point critique de V alors
   $$Q'' - 4XQ' = -12Q$$
   puis que $Q = H_3$ (cf. question **2.b**).

   Donner alors les points critiques de V.

PROBLEME

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient r boules numérotées $1, 2, .., r$. On pioche indéfiniment les boules avec remise, chaque boule pouvant être piochée de façon équiprobable.

Pour tout entier $i \in \{1, 2, .., r\}$, on note Y_i la variable aléatoire égale au « nombre de pioches nécessaires pour obtenir i boules distinctes ». On convient que $Y_1 = 1$.

On désigne par X_r la variable aléatoire égale au « nombre de pioches nécessaires pour obtenir les r boules numérotées $1, 2, .., r$ ». Il est immédiat que $X_r = Y_r$.

Par exemple, en supposant que $r = 4$, si les boules piochées successivement portent les numéros :

$$3, \quad 3, \quad 3, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 2, \quad 4, \quad 1, \quad ...$$

alors on a : $Y_1 = 1, \quad Y_2 = 4, \quad Y_3 = 8, \quad Y_4 = X_4 = 11.$

La partie **I** établit certains résultats préliminaires qui seront utilisés dans d'autres parties.

La partie **II** se consacre à l'étude de la loi des variables discrètes $Y_{i+1} - Y_i$ afin d'en déduire l'espérance et la variance de la variable discrète X_r.

La partie **III** détermine la loi de la variable X_r puis étudie la distribution asymptotique de la variable X_r autour de sa moyenne.

On note exp la fonction exponentielle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.$$

PARTIE I : Résultats préliminaires.

1. Etude d'une suite.

   On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - \ln(n).$

   (a) Ecrire un programme Pascal permettant de calculer u_n pour un entier $n \geqslant 1$ donné.

   (b) A l'aide d'un développement limité, justifier que $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

   En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} (u_n - u_{n+1})$ puis démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Tournez la page s.v.p.

(c) Montrer que la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge (*on ne demande pas le calcul de la limite).*

2. Loi de Gumbel.

Soit Z une variable aléatoire continue. On suppose que Z suit la loi de Gumbel, c'est-à-dire que sa fonction de répartition F_Z est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) = \exp\left(-\exp\left(-t\right)\right).$$

(a) Vérifier que la fonction F_Z est bien une fonction de répartition puis que Z possède une densité que l'on précisera.

(b) On considère la variable aléatoire $W = \exp(-Z)$.

Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire W.

En déduire que la variable aléatoire W suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres.

(c) Pour tout entier k, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(x))^k e^{-x} dx$ est absolument convergente.

(d) En justifiant le changement de variable $x = \exp(-t)$, démontrer que la variable Z admet un moment d'ordre k valant :

$$E(Z^k) = \int_0^{+\infty} (-\ln(x))^k e^{-x} dx.$$

PARTIE II : Etude de la variable X_r

1. Etude du cas $r = 3$.

On suppose uniquement dans cette question que $r = 3$, c'est-à-dire que l'urne ne contient que trois boules numérotées respectivement 1, 2, 3 chacune pouvant être piochée avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

(a) Soit n un entier naturel non nul.

Comparer les événements $(Y_2 > n)$ et C_n : «les n premières pioches fournissent des boules portant toutes le même numéro».

Calculer la probabilité $P(C_n)$. En déduire la probabilité $P(Y_2 > n)$ puis donner la loi de la variable Y_2.

(b) Justifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k])$$

puis que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall k \geqslant 2, \quad P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k]) = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

En déduire la loi de la variable $Y_3 - Y_2$.

Dans toute la suite du problème, r désignera un entier supérieur ou égal à 2.

2. Loi de $Y_{i+1} - Y_i$ pour $i \in \{1, 2, .., r-1\}$.

(a) Justifier que :

$Y_i(\Omega) = \{i, i+1, i+2, ..\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, .., i-1\}$ et $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(b) Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall k \geqslant i, \quad P_{(Y_i = k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

(c) En déduire que $Y_{i+1} - Y_i$ suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres puis établir que :

$$E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r}{r-i} \quad \text{et} \quad V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r.i}{(r-i)^2}.$$

3. Espérance et variance de X_r.

(a) Justifier que : $X_r = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i})$.

En admettant que les variables $Y_2 - Y_1$, $Y_3 - Y_2, \ldots, Y_r - Y_{r-1}$ sont indépendantes, vérifier que :

$$E(X_r) = r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \quad \text{et} \quad V(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}.$$

(b) A l'aide de la question **I.1**, prouver l'existence de deux réels α et β tels que :

$$E(X_r) \underset{r \to +\infty}{=} r\ln(r) + \alpha r + o(r) \quad \text{et} \quad V(X_r) \underset{r \to +\infty}{\sim} \beta r^2.$$

Tournez la page s.v.p.

PARTIE III : Loi de X_r et de sa déviation asymptotique par rapport à sa moyenne.

Pour tout entier $k \in \{1, 2, .., r\}$ et tout entier naturel $m \geqslant 1$, on considère l'événement $A_{k,m}$: «le numéro k n'a pas été pioché durant les m premières pioches».

1. Loi de X_r.

   Soit m un entier naturel non nul.

   (a) Pour tout entier $k \in \{1, 2, .., r\}$, calculer successivement :
   - la probabilité de l'événement $A_{k,m}$,
   - la probabilité de l'événement «k numéros n'ont pas été piochés au cours des m premières pioches».

   (b) Justifier que :

   $$P(X_r > m) = P(A_{1,m} \cup A_{2,m} \cup \cdots \cup A_{r,m})$$

   puis, en utilisant la formule du crible de Poincaré, démontrer que :

   $$\begin{aligned} P(X_r > m) &= \binom{r}{1}\left(1-\frac{1}{r}\right)^m - \binom{r}{2}\left(1-\frac{2}{r}\right)^m + \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r}\left(1-\frac{r}{r}\right)^m \\ &= \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^m. \end{aligned}$$

   En déduire la loi de X_r.

2. Comportement de X_r au delà de sa moyenne.

   (a) A l'aide d'une récurrence sur m, montrer que, pour toute famille $(D_1, .., D_m)$ d'événements, on a :

   $$P(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_m) \leqslant P(D_1) + P(D_2) + \cdots + P(D_m).$$

   (b) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\exp(x) \geqslant 1 + x$. En déduire que :

   $$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \forall k \in \{1, .., r\}, \quad P(A_{k,m}) \leqslant \exp\left(-\frac{m}{r}\right).$$

   (c) Soit $\varepsilon > 0$, on note M_r la partie entière de $(1+\varepsilon)\, r \ln(r)$, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que :

   $$M_r \leqslant (1+\varepsilon)\, r \ln(r) < M_r + 1.$$

Comparer les événements « $(X_r > M_r)$ » et « $(X_r > (1+\varepsilon)\, r\ln(r))$ ».
En déduire que :

$$P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\ln(r)) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{r^{\varepsilon}}.$$

Ainsi on vient d'établir que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{r\to+\infty} P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\ln(r)) = 0$$

qui peut se traduire ainsi : l'événement «X_r est significativement supérieur à sa moyenne » est un événement asymptotiquement rare.

3. Distribution de X_r autour de sa moyenne.

On introduit la suite $(Z_r)_{r\geqslant 2}$ de variables aléatoires définie par :

$$\forall r \geqslant 2, \quad Z_r = \frac{X_r - r\ln(r)}{r}.$$

Soit t un réel fixé, on note m_r la partie entière du réel $r\ln(r)+rt$, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que :

$$m_r \leqslant r\ln(r) + rt < m_r + 1.$$

(a) Justifier l'existence d'un rang $r_0(t)$ tel que :

$$\forall r \geqslant r_0(t), \quad m_r \geqslant 1$$

puis prouver l'égalité :

$$\forall r \geqslant r_0(t), \quad P\left(Z_r > t\right) = P\left(X_r > m_r\right).$$

(b) Soit k un entier naturel. A l'aide d'un développement limité, établir que :

$$m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) \underset{r\to+\infty}{=} -k\ln(r) - kt + o(1)$$

(c) Démontrer que, pour tout entier k, on a : $\binom{r}{k} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}$.

En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{r\to+\infty} \binom{r}{k}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \frac{\exp\left(-kt\right)}{k!}.$$

Tournez la page s.v.p.

(d) En admettant que l'on a :

$$\lim_{r \to +\infty} \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp(-kt)}{k!},$$

exprimer la valeur de la limite $\lim_{r \to +\infty} P(Z_r \leqslant t)$ en fonction de $F_Z(t)$ (*définie à la question* **I.2**).

Quel résultat vient-on d'établir sur la suite de variables aléatoires $(Z_r)_{r \geqslant 2}$?