1. EXERCICE.

Soit $\vec{u}$ un vecteur **unitaire** de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a, b, c) dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$. On a donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et q le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^{\perp}$.
Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $\langle .\,, .\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Que vaut $p + q$?

2. Exprimer, pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $p(\vec{v})$ à l'aide de $\langle \vec{v}\,, \vec{u}\rangle$ et de $\vec{u}$.
   Calculer alors $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$.
   En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

   a. Montrer que :
   $$M^2 = -Q.$$

   b. Calculer $f(\vec{u})$.
   En déduire que $rg(f) \leqslant 2$.
   Déterminer l'image et le noyau de f et les exprimer en fonction de $\mathcal{D}$.

   c. Déduire de la question précédente la valeur de $f \circ p$.
   Montrer alors que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f.

   d. Quelles sont les valeurs propres de f ?
   f est-il diagonalisable ?

4. Pour tout réel θ, on définit l'endomorphisme g_θ par :
   $$g_\theta = Id + (\sin\theta)f + (1 - \cos\theta)f^2$$
   où $f^2 = f \circ f$.

   a. Pour θ et θ' réels, calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$ et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$ avec θ'' réel.

   b. En déduire que, pour tout réel θ, g_θ est inversible et déterminer son inverse.

2. EXERCICE.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. a. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

   b. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

3. *Etude de la dérivabilité de F.*

   a. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

   $$\text{pour } t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

   $$\text{pour tout } (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

   b. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

   c. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$,

   $$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K\,|h|.$$

   d. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$.

4. *Recherche d'un équivalent en $+\infty$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

   a. Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leqslant f_k(x).$$

b. En déduire que, pour $n \geqslant 2$,

$$\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1}+\int_1^{n}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)dt.$$

c. En déduire que :

$$\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1}+\ln(1+x).$$

d. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. PROBLEME.

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer.
Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, g une fonction continue sur $[0,1]$ et on pose $J=\int_0^1 g(t)\,dt$.
L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).
On admet que, pour tout entier naturel non nul n, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

3.1. Méthode de Monte-Carlo.

1. a. Rappeler une densité de U.

   b. Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J.

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U.
   On suppose que $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note pour tout n de $\mathbb{N}^*, S_n=\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$.

   a. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J.

b. *Recherche d'un intervalle de confiance pour J.*

i. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\dfrac{S_n}{n} - J}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. On considère pour " n suffisamment grand " que $\dfrac{\dfrac{S_n}{n} - J}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On donne $\Phi(1,96) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déterminer un intervalle de confiance pour J, au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n.

3. *Application :*

a. A l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt = \pi$.

b. i. Ecrire, en langage Pascal, une fonction **G**, de paramètre **t**, qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.

ii. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction **random** permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
En utilisant le résultat de la question **3.1.2**. et la fonction **G**, les variables informatiques **J** de type **real** et **i,n** de type **integer** étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il calcule une valeur approchée de π.

```
begin
 randomize ;
 readln(n) ;
 J := 0 ;
 for i := 1 to n do ....
 ...........
 writeln (' une valeur approchée de pi est ', J ) ;
end.
```

3.2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

1. Reconnaître la loi de $1-U$.
   On définit la variable aléatoire Y par $Y=\dfrac{1}{2}\left[g(U)+g(1-U)\right]$. Que vaut $E(Y)$?

2. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

   a. Justifier que, pour tout $(u,w)\in[0,1]^2$,
   $$(g(u)-g(w))\,(g(1-u)-g(1-w))\leqslant 0.$$

   b. Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de U.
   Quel est le signe de $E\left[(g(U)-g(W))\,(g(1-U)-g(1-W))\right]$?
   En remarquant que $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ ont même espérance, en déduire que :
   $$E\left[g(U)g(1-U)\right]\leqslant\left(E\left[g(U)\right]\right)^2.$$
   On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

   c. Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y)\leqslant\dfrac{1}{2}V\left(g(U)\right)$.

3. Donner un nouvel intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%, basé sur cette méthode.
   On note ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie 3.1 pour une valeur fixée de n.
   Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur ℓ_n d'intervalle de confiance ?

3.3. Réduction de la variance par stratification.

3.3.1. Etude d'une fonction de plusieurs variables.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par :

$$\text{pour tout } (x_1,x_2,x_3)\in]0,+\infty[^3,\quad f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{9x_3}.$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2. On note :
$$\nabla^2 f(A) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$$
la matrice hessienne de f en $A = (a_1, a_2, a_3)$.
Justifier que, pour tout $A \in]0, +\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :
$${}^tH\, \nabla^2 f(A) H > 0.$$

3. f admet-elle des extremums sur $]0, +\infty[^3$?

4. On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.
Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera.
En écrivant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous contrainte.

3.3.2. Méthode de stratification.

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par
$$I_1 = [0, a[, \quad I_2 = [a, b[, \quad I_3 = [b, 1],$$
et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0, 1]$.
On définit la variable aléatoire $\widetilde{U}$ par $\widetilde{U} = U_1 1_{[T\in I_1]} + U_2 1_{[T\in I_2]} + U_3 1_{[T\in I_3]}$ où 1_A désigne la fonction indicatrice d'un événement A. $\widetilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :
$$\widetilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel x,
$$P(g(\widetilde{U}) \leqslant x) = aP(g(U_1) \leqslant x) + (b-a)P(g(U_2) \leqslant x) + (1-b)P(g(U_3) \leqslant x).$$
En admettant que $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\widetilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\widetilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$, que l'on pourra noter

$f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$.
Vérifier, en prenant la fonction identité pour g, que $\widetilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Déduire de ce qui précède que :

$$E\left(g(\widetilde{U})\right) = aE\left(g(U_1)\right) + (b-a)E\left(g(U_2)\right) + (1-b)E\left(g(U_3)\right).$$

3. On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3. On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1}, \ldots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, \ldots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \ldots, U_{3,n_3})$ telles que :
   • $U_{1,1}, \ldots, U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1,
   • $U_{2,1}, \ldots, U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2,
   • $U_{3,1}, \ldots, U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3,
   et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$Z = a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k}).$$

   Montrer que :

$$V(Z) = a^2\frac{1}{n_1}V\left(g(U_1)\right) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}V\left(g(U_2)\right) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}V\left(g(U_3)\right).$$

4. *Application numérique :*
   On suppose que, pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b, on a

$$a^2V\left(g(U_1)\right) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2V\left(g(U_2)\right) = 1, \quad (1-b)^2V\left(g(U_3)\right) = \frac{1}{9}.$$

   On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour que $E(Z)$ fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?