ecricome

www.ecricome.org

+ copie 24 pages bleu pâle

CONCOURS D'ADMISSION 2006

MATHEMATIQUES

Option SCIENTIFIQUE

Mercredi 19 avril 2006 de 8 h 00 à 12 h 00
Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps": 8 h 00 - 13 h 20

Aucun instrument de calcul n'est autorisé. Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes, mais brèves, de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

1. EXERCICE.

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a donc :

$$\langle x\,,\, y\rangle = {}^tXY$$

où X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$.
Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$.
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note f^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tM$.

1.1. Quelques propriétés de f^*.

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x)\,,\, y\rangle = \langle x\,,\, f^*(y)\rangle.$$
2. Montrer que f^* est le seul endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x)\,,\, y\rangle = \langle x\,,\, g(y)\rangle.$$
3. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).
   a. Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$ calculer $\langle x\,,\, f^*(y)\rangle$.
   b. En déduire que $F^\perp$ est stable par f^*.

1.2. Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes f_u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, f_u^* appartient à $\mathcal{E}$.

3. On note $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k)$ et $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur e_1.

   a. Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.

   b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ est stable par f_u.

   c. Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u .

   d. Déterminer une équation de $\mathcal{D}^\perp$.

   e. Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ et que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

   f. Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme

$$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & l \end{pmatrix}$$

   où e, f, g, h, l sont des réels.

2. EXERCICE.

On considère la fonction f des deux variables réelles x, t , définie par :

$$f(x,t) = e^{-t^2}\sqrt{1+xt}.$$

1. Etude de f.

   a. Justifier que f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$.

   b. Pour $(x,t) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$, calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t).$$

   c. Montrer que pour $(x,t) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}e^{-t^2}.$$

2. Montrer que pour tout réel α strictement positif, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,dt$$

est convergente.
En déduire que pour tout réel x positif, les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,dt.$$

3. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g(x)=\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt.$$

   a. Sans chercher à calculer la dérivée de g, montrer que g est croissante sur $[0,+\infty[$.

   b. Soit $x_0\in[0,+\infty[$.
   Montrer que pour $(x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right|\leqslant \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x-x_0|^2.$$

   c. En déduire que pour $x_0\in[0,+\infty[$,

$$\left|g(x)-g(x_0)-(x-x_0)\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right|\leqslant\frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2}\,dt.$$

   d. Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que g' est définie par

$$g'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

   Retrouver le sens de variations de g.

3. PROBLEME.

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p\in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q=1-p$.
On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.
On dit que la première série est de longueur $n\geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)^{ème}$ l'autre côté.
De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine

(si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.
On définit de même les séries suivantes.
Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.
Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le $i^{ème}$ lancer amène Pile" et F_i l'événement contraire.
Les trois parties sont indépendantes.

3.1. Etude des longueurs de séries.

1. On note L_1 la longueur de la première série.
   Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+1$.
   En déduire que
   $$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$$
   Vérifier que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1.$$

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.

   a. Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+k+1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.

   b. En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$
   On admet que
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1.$$

   c. Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2.

3.2. Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \frac{1}{2}$.
On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers** :
-La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)^{ème}$ l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce ;
-La dernière série se termine nécessairement au $n^{ème}$ lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP...(F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1 \; ; \quad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2 \; ;$$

$$N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3 \; ; \quad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4 \; ;$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.
On admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

3. *Simulation informatique :*
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le $k^{ème}$ lancer amène Pile et 0 sinon.
On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random(2)` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0, 1\}$ (soit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$). Compléter le programme informatique suivant pour que, `m` étant une valeur entière, inférieure à 100, entrée par l'utilisateur, il simule les m variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ (dont les valeurs seront placées dans le tableau `X`) et détermine les valeurs de $N_1, N_2, \ldots, N_m$ (qui seront stockées dans le tableau `N`).

```
program simulation;
const nmax=100;
type suite=array[1..nmax]of integer;
var X, N: suite;
  m: integer;
begin
readln(m);
randomize;
X[1]: =....; N[1]: =....;
for i: =2 to m do begin
     X[i]: =...
     .....
     .....
     end;
end.
```

4. **Fonction génératrice de N_n.**
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k.$$

a. Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

b. Que représente $G_n'(1)$?

c. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$P\left((N_n = k) \cap P_n\right) = \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\right) + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\right).$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$P\left((N_n = k) \cap F_n\right) = \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\right) + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}\right).$$

Montrer alors que

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1).$$

d. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que

$$G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).$$

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$$

e. Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

3.3. Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. Montrer que pour tout réel x on a

$$1 - x \leqslant e^{-x}.$$

2. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geqslant k$, on note

$$C_n = \bigcup_{k \leqslant i \leqslant n} A_i = A_k \cup \cdots \cup A_n.$$

a. Justifier que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.$$

b. Montrer que

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$$

puis, en utilisant 3.3.1, que

$$P(C_n) \geqslant 1 - exp(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)).$$

En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1.$$

c. Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i) \ ?$$

d. Justifier que

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

et en déduire que

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i) = 1.$$

3. En considérant les événements A_n "on obtient Pile au $(2n)^{ème}$ et au $(2n+1)^{ème}$ lancers", montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.