ecricome

banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles
escbordeaux/escmarseille/icnnancy/escreims/escrouen/esctoulouse

J. 4681

CONCOURS D'ADMISSION 2003

MATHÉMATIQUES
option SCIENTIFIQUE

lundi 28 avril 2003 de 8 h 00 à 12 h 00

durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 8 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

1. EXERCICE.

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^2 \\ u_0 = a, \quad a \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$$

1.1. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

1.2. Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n$$

1. Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln(1+\frac{1}{u_n})$$

   En déduire que quels que soient les entiers naturels p et n :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln(1+\frac{1}{u_n})$$

2. En déduire que quels que soient les entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln(1+\frac{1}{u_n})$$

3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n)$$

   En passant à la limite pour n fixé dans l'encadrement 1.2.2, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(\alpha 2^n) \leqslant u_n + 1$$

En déduire, lorsque n tend vers l'infini, l'équivalent suivant :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$$

5. On pose :

$$\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$$

Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :

$$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n)$$

6. Prouver enfin que lorsque n tend vers l'infini :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1)$$

2. EXERCICE.

Dans cet exercice, on adopte les notations suivantes :
$M_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels (n entier naturel non nul).
$S_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.
$A_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.

On rappelle qu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si :

$${}^tA = -A$$

${}^tA$ étant la matrice transposée de A.
On définit les applications Tr et φ par :

Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et B de $M_n(\mathbb{R})$, $\quad Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad , \varphi(A,B) = Tr({}^tAB)$

1. Montrer que Tr est une application linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall B \in M_n(\mathbb{R}) \qquad Tr(AB) = Tr(BA)$$

2. Prouver que Tr est surjective. Donner la dimension du noyau de Tr.

3. Prouver que φ définit un produit scalaire dont la norme associée, $\| \ \|$, vérifie :

$$\forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

4. Etablir que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}) \quad |Tr(A)| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$$

5. Démontrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $M_n(\mathbb{R})$ pour φ.

6. Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$. En déduire que pour toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ de $M_n(\mathbb{R})$,

$$\underset{M\in S_n(\mathbb{R})}{Min} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-m_{ij})^2 \text{ existe et vaut } \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-a_{ji})^2$$

3. PROBLEME.

On rappelle que :
- La fonction Γ est la fonction définie pour $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt$$

- Si X suit une loi normale et si α est un réel non nul alors αX suit également une loi normale.

On admettra que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

3.1.

On considère la variable aléatoire $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_i^2$, où $X_1, X_2, \ldots.., X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la fonction de répartition F_{Y_1} de $Y_1 = X_1^2$.

2. En déduire que Y_1 est une variable aléatoire qui suit une loi gamma dont on précisera les paramètres.

3. Justifier que Y_n suit une loi gamma de paramètres $(2, \frac{n}{2})$.

4. Donner les valeurs de l'espérance $E(Y_n)$ et de la variance $V(Y_n)$ de Y_n.

5. On dit alors que Y_n suit une loi du $Chi - deux$ à n degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$. Soient G_n la fonction de répartition de Y_n et β un réel dans l'intervalle $]0, 1[$. Montrer qu'il existe un réel unique t tel que $G_n(t) = \beta$. Ce réel est alors noté $\chi^2_\beta(n)$

Dans la suite du problème on considère $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. L'objet des questions suivantes est de déterminer une estimation ponctuelle (3.2) puis une estimation par intervalle de confiance (3.3 et 3.4) de la variance σ^2.

Si g est une fonction de n variables réelles, et que $Z_n = g(X_1, \ldots, X_n)$, on rappelle que :
- g est un estimateur de θ (Z_n est un estimateur de θ) lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = \theta$$

- L'estimateur Z_n est dit sans biais lorsque pour tout n entier naturel non nul :

$$E(Z_n) = \theta$$

- L'estimateur Z_n est dit convergent lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} V(Z_n) = 0$$

3.2. Estimation ponctuelle de σ^2.

Pour n entier naturel non nul, on pose :

$$F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - F_n)^2$$

1. Montrer que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est un estimateur convergent sans biais de m.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a. Démontrer que :

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

puis que :

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - (F_n - m)^2$$

b. Prouver que :

$$E(V_n) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

c. En déduire un estimateur sans biais de σ^2.

3.3. Estimation par intervalle de confiance de σ^2, m étant connue.

Pour n entier supérieur à 2, on pose :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 \text{ et } T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$$

1. Justifier que U_n suit une loi du $Chi - deux$ à n degrés de liberté.

2. Montrer l'égalité des événements :

$$\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right] \quad \text{et} \quad \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right]$$

En déduire que la probabilité de l'événement $\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$ est $1-\alpha$.

3.4. Estimation par intervalle de confiance de σ^2, m étant inconnue.

$M_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et 1 colonne à coefficients réels et $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'identité de $\mathbb{R}^n$.
Pour n entier supérieur à 2, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2, \quad U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2$$

1. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A définie par :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{ii} = n-1 & \\ a_{ij} = -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et B la matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a. Justifier que A est une matrice diagonalisable.

b. Calculer le produit AB, en déduire une valeur propre de A et un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

c. Montrer que :

$$\dim \operatorname{Im}(\varphi - nId_{\mathbb{R}^n}) = 1$$

d. En déduire la dimension de $Ker(\varphi - nId_{\mathbb{R}^n})$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.

e. Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un vecteur propre associé à la valeur propre n. Prouver que : $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 0$.

f. Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la dernière colonne est proportionnelle à B et d'une matrice diagonale D que l'on déterminera, telle que :

$$P^{-1}AP = D \quad \text{avec } {}^tP = P^{-1}$$

(On ne demande pas la matrice P).

g. On note $(p_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ les coefficients de la matrice ${}^tP$, montrer que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$$

puis que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2 = 1$$

Tournez la page S.V.P.

2. Soit q l'application de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad q(X) = \ {}^tXMX \ \text{ où } \ M = \frac{1}{n}A$$

a. On pose $Y = \ {}^tPX$, montrer que :

$$q(X) = \frac{1}{n}{}^tYDY$$

puis que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

b. En utilisant l'écriture $q(X) = \frac{1}{n}{}^tYDY$, montrer que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j\right)^2$$

3. Pour tout i de l'ensemble $\{1, \ldots, n-1\}$ on pose :

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}X_j$$

a. Justifier que Y_i suit une loi normale puis montrer que $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = \sigma^2$.

b. En utilisant les résultats de la question 3.4.2, montrer que :

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2$$

c. En admettant que les $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ sont mutuellement indépendantes, justifier que U_n suit une loi du $Chi - deux$ à $n-1$ degrés de liberté.

d. Montrer que les événements :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] \quad \text{et} \quad \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$$

sont égaux.

e. En déduire que la probabililité de l'événement :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

est $1-\alpha$.