ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2024

2

prépa

Mathématiques Approfondies

Série ECG

Lundi 15 avril 2024 de 8h00 à 12h00
Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 7 pages.

INSTRUCTIONS

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Exercice 1

À toutes fins utiles, on donne $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$, $3^4 = 81$ et $4^4 = 256$.

1. Rappeler en fonction du réel α, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

On note alors $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et pour tout entier naturel N non nul : $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ et $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. (a) En étudiant la monotonie de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$, montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

   (b) En déduire que pour tout entier naturel N non nul :

$$\frac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \frac{1}{N}.$$

3. Déterminer un entier naturel N_0 tel que : $\forall N \geqslant N_0$, $|S_N - S| \leqslant 10^{-3}$.
4. On pose pour tout entier naturel N non nul : $T_N = S_N + \dfrac{1}{N+1}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel N non nul :

$$|T_N - S| \leqslant \frac{1}{N^2}.$$

   (b) Déterminer un entier naturel N_1 strictement inférieur à N_0 tel que $\forall N \geqslant N_1$, $|T_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

On pose maintenant pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls :

$$u_n(p) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}.$$

5. Soit p un entier naturel non nul.
   (a) Donner un équivalent simple de $u_n(p)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(p)$.

On pose pour tout entier naturel p non nul :

$$U(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(p).$$

6. (a) Déterminer deux réels a, b vérifiant pour tout entier naturel n non nul : $u_n(1) = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
   (b) En déduire la valeur de $U(1)$.
7. (a) Exprimer, pour tout couple d'entiers naturels (n,p) tel que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$, $u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1)$ en fonction de p et de $u_n(p)$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel p non nul : $U(p) = \dfrac{1}{p.p!}$.
8. (a) Montrer, par récurrence sur p, que pour tout entier naturel p non nul, pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p} (k-1)! u_n(k)$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel p non nul : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge et

$$S = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} + p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}.$$

9. En reprenant la méthode de la question 2, que l'on appliquera cette fois à la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{p+2}}$, montrer que pour tout couple (N,p) d'entiers naturels non nuls :

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \leqslant \frac{1}{p+1} . \frac{1}{N^{p+1}}.$$

10. On suppose maintenant que $p = 3$. On pose donc pour tout entier naturel N non nul :

$$U_N = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^2} + 3! \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{49}{36} + 6 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Déterminer un entier N_2 tel que $\forall N \geqslant N_2$, $|U_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

11. On représente sur la figure 1 l'évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N, respectivement. Commenter ce graphique, à la lumière des réponses apportées aux questions précédentes.

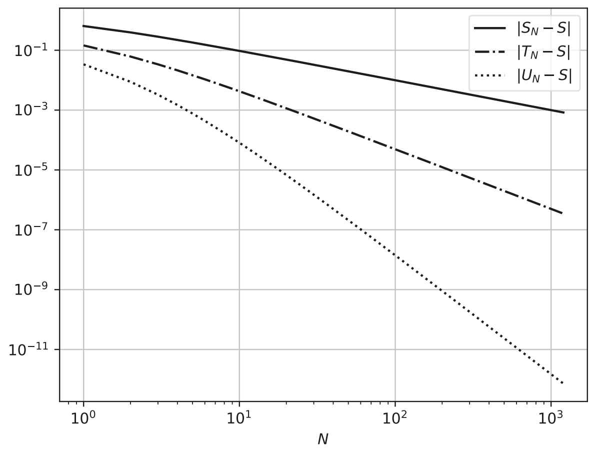

FIGURE 1 – Évolution des erreurs d'approximation de S par S_N, T_N et U_N.

Exercice 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, $x_0, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts.

Partie 1

On considère l'application :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_0), \ldots, P(x_n)\big) \end{array} \right. .$$

On rappelle que si deux polynômes de degré au plus m coïncident en $m+1$ points distincts, alors ils sont égaux (m étant un entier naturel).

1. (a) Montrer que Φ est une application linéaire injective.

   (b) En déduire que pour tout élément $(y_0, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P de degré au plus n vérifiant $P(x_0) = y_0, \ldots, P(x_n) = y_n$.
   Un tel polynôme P est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

2. Montrer que pour tout entier naturel i de $[\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme L_i de $\mathbb{R}_n[x]$ vérifiant

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.
   Expliciter les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3.

4. Montrer que pour tout entier i de $[\![0, n]\!]$, $L_i(x) = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$.

   En déduire pour tout entier i de $[\![0, n]\!]$, le degré de L_i et son coefficient dominant.

$\mathscr{L}$ désigne la famille $(L_0, \ldots, L_n)$. On considère maintenant pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) Q(x_k).$$

5. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
6. Montrer que $\mathscr{L}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$ pour ce produit scalaire.
7. Montrer que le $(n+1)$-uplet des coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ dans la base $\mathscr{L}$ est $\big(P(x_0), \ldots, P(x_n)\big)$.

Partie 2

On pose maintenant $N_0 = 1$ et pour tout entier naturel i de $[\![1, n]\!]$:

$$N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

8. Dans cette question uniquement, on suppose que $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.

   (a) Expliciter les polynômes N_0, N_1, N_2 et N_3.

   (b) Pour tout entier i de $[\![0, 3]\!]$, déterminer les coordonnées $(m_{0,i}, m_{1,i}, m_{2,i}, m_{3,i})$ de N_i dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3).
   On note alors M la matrice $(m_{i-1,j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$.

   (c) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

9. Montrer que $\mathscr{N} = (N_0, \ldots, N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

10. (a) Montrer que $N_0 = \sum_{k=0}^{n} L_k$.

    (b) Montrer que pour tout entier naturel i de $[\![0, n]\!]$, $N_i = \sum_{k=i}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j)\ L_k$.

11. Donner la matrice de passage A de la base $\mathscr{L}$ vers la base $\mathscr{N}$. La base $\mathscr{N}$ est-elle orthonormée ?

On considère $n+1$ points $X_0 = (x_0, y_0), \ldots, X_n = (x_n, y_n)$.
Pour tout entier naturel k de $[\![0, n]\!]$, on note P_k le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $X_0, \ldots, X_k$: c'est l'unique polynôme de degré au plus k vérifiant $P_k(x_0) = y_0, \ldots, P_k(x_k) = y_k$.

12. Justifier l'existence et l'unicité des $n+1$ réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que

$$P_n(x) = a_0 N_0(x) + a_1 N_1(x) + \cdots + a_n N_n(x).$$

13. Dans cette question uniquement, on admet que $a_0 = y_0$ et que pour tout entier naturel k de $[\![1, n]\!]$, $a_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)}$.

    Considérons que les données sont représentées par deux matrices X et Y

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

    En Python, on représentera cela par deux matrices, au format `numpy.array`, comportant chacun $n+1$ lignes et 1 colonne.

    (a) Écrire une fonction, en langage Python, nommée `prodX` prenant en entrée X, un entier i et un entier k et qui renvoie le produit $\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)$.

    (b) Écrire une fonction, en langage Python, nommée `coeff` prenant en entrée X et Y et qui renvoie les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sous forme d'une matrice.

    (c) Comment utiliser cette fonction pour trouver l'inverse de la matrice de passage A définie à la question 11 ? Combien d'appels de cette fonction sont nécessaires ?

14. (a) Montrer que $a_0 = y_0$ et que a_n est le coefficient du monôme de degré n de $P_n(x)$.

    (b) Justifier que $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$.

    (c) En déduire que $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$.

15. Soit k un entier naturel de $[\![1, n-1]\!]$. On pose $Q_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j N_j(x)$.

    (a) Montrer que Q_k est un élément de $\mathbb{R}_k[x]$.

    (b) Montrer que, pour tout entier i de $[\![1, k]\!]$, $Q_k(x_i) = y_i$.

    (c) En déduire que $P_k(x) = a_0 N_0(x) + \ldots + a_k N_k(x)$.

    (d) Montrer que $a_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)}$.

Problème

Partie 1

On considère un paramètre réel $a > 0$, et l'on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}.$$

1. Justifier que f est une densité de probabilité.
2. Montrer que la fonction de répartition associée à f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \longmapsto \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}.$$

Si une variable aléatoire réelle X a pour densité la fonction f, on dit que X suit la loi de Cauchy de paramètre $a > 0$.

Lorsque $a = 1$, on dit que X suit la loi de Cauchy standard.

3. Une variable aléatoire X suivant une loi de Cauchy admet-elle une espérance ?
4. Soit X une variable aléatoire réelle.
   Montrer que X suit la loi de Cauchy standard si et seulement si aX suit la loi de Cauchy de paramètre a.
5. Soit k un entier naturel non nul. Soit x un réel non nul.
   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{1}{(t^2 + k^2)((x-t)^2 + 1)}$.
   On admet qu'il existe des réels α, β, γ tels que pour tout réel t, $g(t) = \dfrac{\alpha t + \beta}{t^2 + k^2} + \dfrac{\alpha(x-t) + \gamma}{(x-t)^2 + 1}$.
   (a) Montrer que $\begin{cases} \beta + \gamma &= \alpha x \\ \alpha(x^2 + 1 - k^2) &= 2\beta x \\ \beta(x^2 + 1) + \alpha x k^2 + \gamma k^2 &= 1 \end{cases}$
   (b) En déduire que $\begin{cases} \beta(x^2 + k^2 + 1) + 2\gamma k^2 &= 1 \\ 2\beta + \gamma(x^2 + k^2 + 1) &= 1 \end{cases}$
   (c) Montrer finalement que $\beta + \gamma k = \dfrac{k+1}{x^2 + (k+1)^2}$.
   (d) Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$G(t) = \frac{\alpha}{2}\ln\left(\frac{t^2 + k^2}{(x-t)^2 + 1}\right) + \frac{\beta}{k}\arctan\left(\frac{t}{k}\right) + \gamma \arctan(t - x)$$
   est une primitive de g.
6. Soit k un entier naturel non nul.
   Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre k et Y une variable aléatoire de loi de Cauchy standard, indépendante de X. On admet que $X + Y$ est une variable aléatoire à densité.
   (a) Montrer que la fonction φ est une densité de $X + Y$ où φ est la fonction définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \varphi(x) = \frac{k}{\pi^2}\left(\lim_{t \to +\infty}(G(t)) - \lim_{t \to -\infty}(G(t))\right).$$
   (b) En déduire que $X + Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $k + 1$.
7. Montrer par récurrence sur k que, pour tout k entier naturel non nul, si $X_1, \ldots, X_k$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Cauchy de paramètre a, alors $X_1 + \cdots + X_k$ suit la loi de Cauchy de paramètre ka.
   On pourra se ramener à la question précédente en utilisant la question 4.

Partie 2

8. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
   Montrer que $Y = a \cdot \tan\left(\pi\left(U - \dfrac{1}{2}\right)\right)$ suit la loi de Cauchy de paramètre a.

9. Écrire une fonction en langage Python, nommée `cauchy`, prenant en argument un nombre flottant $a > 0$ et simulant une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètre a.

Soient n un entier naturel non nul, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X et $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

10. Écrire une fonction en langage Python, nommée `realisation`, prenant en argument un entier n et un réel a et renvoyant un vecteur de taille n contenant une réalisation du n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$.

11. Écrire une fonction en langage Python, nommée `moyennes`, prenant en argument un entier n et un réel a et renvoyant un vecteur de taille n contenant une réalisation de $(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n)$.

12. On a représenté sur la figure 2 l'évolution de trois réalisations de ces vecteurs.
    Commenter cette figure.

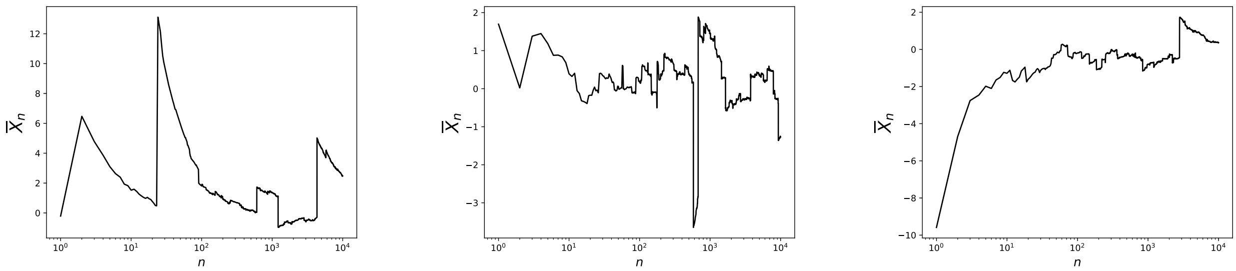

FIGURE 2 – Trois réalisations de $(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n)$.

Partie 3

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Cauchy de paramètre réel a strictement positif.

On considère un paramètre réel M strictement, et l'on pose pour tout entier naturel non nul n :

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } |X_n| \leqslant M, \\ 0 & \text{si } |X_n| > M. \end{cases}$$

On pose enfin pour tout entier naturel n non nul :

$$\overline{Y}_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

13. Déterminer la loi de Y_n, d'abord en fonction de $F(M)$, puis uniquement en fonction de a et de M.

14. Démontrer que $\overline{Y}_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à $p(a) = \dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\dfrac{M}{a}\right)$.

15. (a) Justifier que $0 < p(a) < 1$ et que $p(a)(1 - p(a)) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

    (b) On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée-réduite.
    Montrer qu'il existe un unique réel z strictement positif vérifiant $\Phi(z) = 0,975$.

    (c) Construire un intervalle de confiance asymptotique au niveau de confiance 95% de $\arctan\left(\dfrac{M}{a}\right)$.

    (d) En déduire un intervalle de confiance asymptotique au niveau de confiance 95% de a.

16. On a représenté l'évolution de ces intervalles de confiance de a pour les valeurs de $a = M = 1$ sur la figure 3. Commenter cette figure.

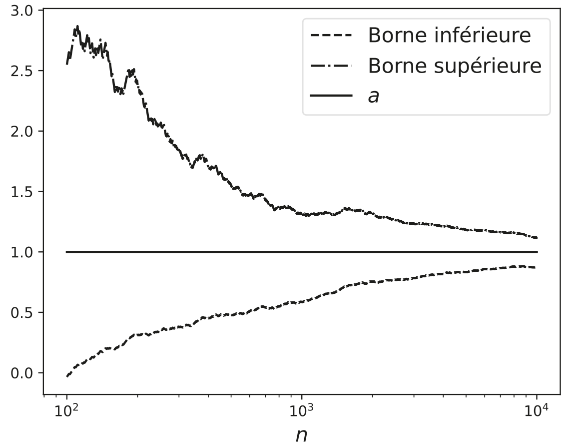

FIGURE 3 – Évolution des intervalles de confiance pour $a = M = 1$.

17. Quelle(s) qualité(s) attend-on d'un intervalle de confiance ?
Commenter la figure 4 quant au choix du paramètre M.

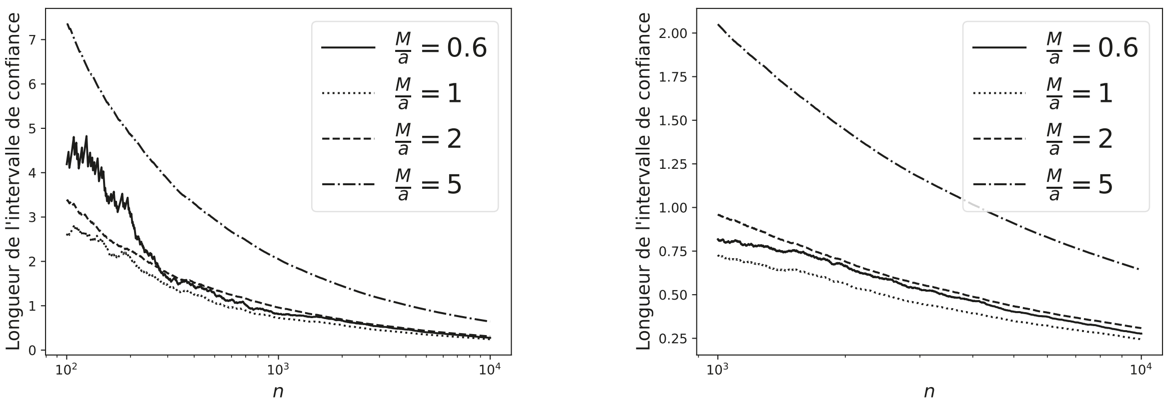

FIGURE 4 – Évolution des intervalles de confiance pour différentes valeurs de $\dfrac{M}{a}$.