2020

CORRIGÉ

MATHEMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE ECONOMIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A : Etude du cas où $a = 1$.

1. On obtient $\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{(M - I_3)^2 = 0}$.

2. La question précédente fournit un polynôme annulateur de M : le polynôme $P(X) = (X-1)^2$. Ainsi, le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines de P. Le polynôme P admet le réel 1 comme unique racine, donc $\boxed{\text{la seule valeur propre possible de } M \text{ est } 1}$.

3. D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de M, $\boxed{M \text{ est donc bien inversible}}$.
Supposons que M est diagonalisable. Dans ce cas, il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$. Or, 1 étant l'unique valeur possible de M, D est la matrice identité. Donc $M = PI_3P^{-1} = I_3$.
Ceci est absurde, donc $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Partie B : Étude du cas où $a = 0$.

4. Avec $a = 0$, on obtient : $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :
$$MX = X \Leftrightarrow (M - I_3)X = 0 \Leftrightarrow x - y - z = 0$$
Donc $Ker(M - I_3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0\}$. Ainsi, $\boxed{1 \text{ est bien valeur propre de } M}$.
De plus, $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(M)}$ puisque ces deux vecteurs sont non colinéaires, et $\boxed{\dim(E_1(M)) = 2}$.

5. En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de M, on remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc la famille (C_1, C_2, C_3) est liée, donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$.

6. D'après les questions précédentes, 0 et 1 sont valeurs propres de M.
De plus, $E_1(M)$ est de dimension 2, chaque sous-espace propre est de dimension supérieure ou égale à 1, et la somme des dimensions des sous-espaces propres de M ne peut pas excéder 3.
Donc $E_0(M)$ est de dimension 1, et M ne peut pas admettre d'autre valeur propre.
Conclusion : $\boxed{\text{La matrice } M \text{ admet exactement deux valeurs propres : 0 et 1}}$, on a :
$\boxed{\dim(E_0(M)) = 1 \text{ et } \dim(E_1(M)) = 2}$, et comme $\dim(E_0(M)) + \dim(E_1(M)) = 3$, $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1.

7. Montrons d'abord que la famille (u, v, w) est libre.

   Soient a, b, c trois réels tels que $au + bv + cw = 0$. On a alors : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases}$, donc $a = b = c = 0$.

   Donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre, et $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$
8. On obtient $\boxed{f(u) = (a, a, a) = au}$ et $\boxed{f(v) = (1, 0, 1) = v}$
9. On obtient : $\boxed{f(w) = (a+1, 1, a) = av + w.}$
10. D'après les questions précédentes : on obtient : $\boxed{T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$
11. La matrice T est triangulaire, donc ses valeurs propres sont les réels situés sur sa diagonale.
    Comme $a \neq 1$, donc T a deux valeurs propres distinctes : 1 et a.
    On obtient facilement que l'espace propre associé à la valeur propre a pour T est engendré par le vecteur $(1, 0, 0)$; et que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par le vecteur $(0, 1, 0)$.
    Ainsi, chacun des sous-espaces propres de T est de dimension 1.
    De plus, M et T sont semblables et représentent donc un même endomorphisme dans des bases différentes.
    En particulier, M a les mêmes valeurs propres que T, et les sous-espaces propres sont de même dimension.
    $\dim(E_a(M)) + \dim(E_1(M)) = 1 + 1 = 2 \neq 3$, donc $\boxed{\text{la matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

EXERCICE 2

Partie A : Étude de la fonction f_n.

1. La fonction : $t \mapsto \dfrac{t^{2n} - 1}{t + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, comme quotient de telles fonctions, dont le dénominateur ne s'annule pas. On note H une de ses primitives, qui est donc C^1 sur $\mathbb{R}_+$. On a alors :

   $$\forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = H(x) - H(0).$$

   Ainsi, f_n est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (somme d'une fonction C^1 et d'une constante) et :

   $$\forall x \geqslant 0, \quad f_n'(x) = H'(x) - 0 = \boxed{\frac{x^{2n} - 1}{x + 1}.}$$
2. La fonction f_n' est négative sur $[0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.
   Donc $\boxed{f_n \text{ est décroissante sur } [0,1] \text{ et croissante sur } [1, +\infty[}$.

3. La fonction f_n' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, en tant que quotient de fonctions de classe C^1, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, et :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f_n''(x) = \frac{2nx^{2n-1}(x+1) - (x^{2n}-1)}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)x^{2n} + nx^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}.$$

Le numérateur est une somme de termes positifs, et le dénominateur est un carré, donc f_n'' est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc $\boxed{f_n \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+}$.

4. (a) La fonction : $h : u \mapsto u^n$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, et :

$$\forall u \geqslant 1, \quad h'(u) = nu^{n-1} \geqslant n.$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, appliquée à la fonction h entre 1 et t^2 :

$$h(t^2) - h(1) \geqslant n(t^2 - 1),$$

ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\forall t \geqslant 1, \ t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)}.$$

(b) Partons de l'inégalité précédente, pour tout $t \geqslant 1$. On divise des deux côtés par le nombre positif $t+1$ (strictement positif), et après simplification par le facteur $t+1$, on obtient :

$$\forall t \geqslant 1, \ \frac{t^{2n}-1}{t+1} \geqslant n(t-1).$$

D'où, par positivité de l'intégrale, $(1 \leqslant x)$:

$$\forall x \geqslant 1, \ f_n(x) = f_n(1) + \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \geqslant f_n(1) + n\int_1^x (t-1)\mathrm{d}t = \boxed{f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2}.$$

(c) Par comparaison, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^2 = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty}$.

5. On a directement que $f_n(0) = 0$.
De plus, f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$, (en effet $\forall x \in [0, 1[, f_n'(x) < 0$).
Ainsi, on a nécessairement $f_n(1) < f_n(0) = 0$.

6. D'après la question précédente, f_n est strictement négative sur $]0, 1]$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
Sur $]1, +\infty[$, la fonction f_n est continue et strictement croissante (car $\forall x > 1, f_n'(x) > 0$), donc réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers $]f_n(1), +\infty[$. Comme $0 \in]f_n(1), +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle.
Conclusion : $\boxed{\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution strictement positive}}$, et cette solution est strictement supérieure à 1.

Partie B : Étude d'une suite implicite.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n+2} - t^{2n}}{t+1} dt = \int_0^x t^{2n}(t-1)dt = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \boxed{x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)}.$$

8. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$,, on a : $\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \geqslant 0$ et $x^{2n+1} \geqslant 0$.

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant \frac{2n+2}{2n+1},\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0$, donc $\boxed{f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)}$.

   (b) D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$.
   On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente à x_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant f_n(x_n).$$

   Et par construction de x_n, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x_n) = 0$.
   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant 0}$.

   (c) Réécrivons l'inégalité précédente, en tenant du compte du fait que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1}).$$

   Par ailleurs, les réels x_n et x_{n+1} sont supérieurs à 1, et sur $[1, +\infty[$, la fonction f_{n+1} est strictement croissante. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geqslant x_{n+1}.$$

   Donc la suite (x_n) est décroissante. De plus, elle est minorée par 1.
   Ainsi, $\boxed{(x_n) \text{ converge vers un réel supérieur ou égal à } 1.}$

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^{2n} \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant t^{2n} - 1 \leqslant 0$.
   On divise par le réel $t+1$, strictement positif :

$$\forall t \in [0,1],\ -\frac{1}{t+1} \leqslant \frac{t^{2n}-1}{t+1} \leqslant 0.$$

   Intégrons membre à membre cet encadrement, sur l'intervalle $[0,1]$, en remarquant que les bornes d'intégration sont bien dans l'ordre croissant, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0}$$

   (b) On applique l'inégalité de la question 4(b) avec $x = x_n$ (ce qui est licite, puisque $x_n \geqslant 1$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x_n) \geqslant f_n(1) + \frac{n}{2}(x_n - 1)^2.$$

Et comme $f_n(x_n) = 0$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -f_n(1) \geqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \geqslant 0.$$

De plus, d'après la question précédente : $-f_n(1) \leqslant \ln 2$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \leqslant \ln 2.$$

On multiplie par le réel $\dfrac{2}{n}$, strictement positif :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant (x_n - 1)^2 \leqslant \frac{2\ln 2}{n},$$

puis, sachant que $x_n - 1 \geqslant 0$, on compose par la fonction racine, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}.$$

Par encadrement, on peut conclure que $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers } 1.}$

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables.

10. On a : $G_n = f_n \circ u \times f_n \circ v$, où $u : (x, y) \mapsto x$ et $v : (x, y) \mapsto y$.
La fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et f_n est de classe $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $f_n \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
De même, $f_n \circ v$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, donc par produit, la fonction G_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} \partial_1(G_n)(x, y) = f_n'(x) f_n(y) \\ \partial_2(G_n)(x, y) = f_n(x) f_n'(y) \end{cases}}$

11. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \nabla(G_n)(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_n'(x) f_n(y) = 0 \\ f_n(x) f_n'(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } y = x_n \\ x = x_n \text{ ou } y = 1 \end{cases}$

Comme $x_n \neq 1$, $\boxed{\text{la fonction } G_n \text{ admet deux points critiques : } (1, 1) \text{ et } (x_n, x_n).}$

12. Calculons la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} \partial_{1,1}(G_n)(x, y) = f_n''(x) f_n(y) \\ \partial_{2,2}(G_n)(x, y) = f_n(x) f_n''(y) \\ \partial_{1,2}(G_n)(x, y) = f_n'(x) f_n'(y) \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\nabla^2(G_n)(1, 1) = \begin{pmatrix} f_n(1) f_n''(1) & 0 \\ 0 & f_n(1) f_n''(1) \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\nabla^2(G_n)(x_n, x_n) = \begin{pmatrix} 0 & (f_n'(x_n))^2 \\ (f_n'(x_n))^2 & 0 \end{pmatrix}}$.

13. On sait que $x_n > 1$, donc $f_n'(x_n) > 0$. Ainsi, la matrice hessienne de G_n en (x_n, x_n) admet exactement deux valeurs propres : $f_n'(x_n)$ et $-f_n'(x_n)$. En effet,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & (f_n'(x_n))^2 \\ (f_n'(x_n))^2 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible} \iff \lambda^2 - (f_n'(x_n))^4 = 0 \iff \lambda = \pm f_n'(x_n)$$

Ainsi, $\nabla^2(G_n)(x_n, x_n)$ a une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. Donc G_n n'admet pas d'extremum local en (x_n, x_n).

14. La matrice hessienne de G_n en $(1, 1)$ est diagonale : on lit donc ses valeurs propres sur sa diagonale : il n'y en a qu'une : $f_n(1) \times f_n''(1)$. Or, d'après l'étude établie précédemment, $f_n(1) < 0$ et $f_n''(1) > 0$, donc l'unique valeur propre de la matrice hessienne de G_n en $(1, 1)$ est strictement négative.
On peut donc conclure que la fonction G_n admet un maximum local en $(1, 1)$.

EXERCICE 3

1. Soit $a > 0$. L'intégrale $I_n(a)$ converge en tant qu'intégrale de Riemann ($n \geqslant 2 > 1$).
$\forall y \geqslant a$, $\displaystyle\int_a^y \frac{1}{t^n} dt = \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} \right]_a^y = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{y^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.
Donc l'intégrale $I_n(a)$ converge bien et vaut $\dfrac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. (a) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, et continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en a.
De plus, f est nulle sur $]-\infty, a[$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
Et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt = 3a^3 \times I_4(a)$.
D'après la question précédente, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.
En conclusion : la fonction f est une densité de probabilité.

(b) Pour tout réel x, en reprenant le calcul de la question 1, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ 1 - \left(\dfrac{a}{x}\right)^3 & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$$

(c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge (absolument), c'est-à-dire si et seulement si $3a^3 \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge.
Or, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = I_3(a)$ converge et vaut $\dfrac{1}{2a^2}$, donc X admet une espérance, et $E(X) = \dfrac{3}{2}a$.

(d) De même, X admet un moment d'ordre 2, et (par théorème de transfert)

$$E(X^2) = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2} dt = 3a^3 \times I_2(a) = \frac{3a^3}{a} = 3a^2.$$

Donc $\boxed{X \text{ admet une variance}}$, et $V(X) = 3a^2 - \frac{9}{4}a^2 = \boxed{\frac{3}{4}a^2}$.

3. (a) On obtient : $\boxed{Y(\Omega) = [a, +\infty[.}$

(b) • Pour $x \leqslant a$, on a : $F_Y(x) = 0$.

• Pour $x > a$, on a : $F_Y(x) = P\left(\frac{a}{U^{1/3}} \leqslant x\right) = P\left(U^{1/3} \geqslant \frac{a}{x}\right) = 1 - P\left(U \leqslant \left(\frac{a}{x}\right)^3\right) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3$.

Finalement, U et et X ont la même fonction de répartition, donc $\boxed{\text{suivent la même loi}}$.

(c)

```
function Y=simulX(a,m,n)
    U=rand(m,n)
    Y=a./U.^(1/3)
endfunction
```

4. (a) $P([X > 2a]) = 1 - F_X(2a) = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2a}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{8}}$.

(b) $P_{[X>2a]}([X > 6a]) = \frac{P(X > 6a)}{P(X > 2a)} = 8 \times \frac{1}{6^3} = \boxed{\frac{1}{27}}$.

(c)

```
a=10
N=100000
s1=0
s2=0
X=simulX(a,1,N)
for k=1:N
    if X(k)>2*a then
        s1=s1+1
        if X(k)>6*a then
            s2=s2+1
        end
     end
end
if s1>0 then
     disp(s2/s1)
end
```

5. (a) Par linéarité de l'espérance, $E(V_n) = \dfrac{2}{3n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \dfrac{2}{3n} \times n \times \dfrac{3}{2}a = a$.

Donc $\boxed{V_n \text{ est un estimateur sans biais pour le paramètre } a.}$

(b) L'estimateur V_n est sans biais, donc son risque quadratique est égal à sa variance.

On a de plus, par propriété de la variance : $V(V_n) = \dfrac{4}{9n^2} V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$.

Et par indépendance des variables aléatoires X_k, on a : $V(V_n) = \dfrac{4}{9n^2} \times n \times \dfrac{3}{4}a^2 = \dfrac{a^2}{3n}$.

Donc $\boxed{\text{le risque quadratique de } V_n \text{ vaut bien } \dfrac{a^2}{3n}.}$

6. (a) On pose $W_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. On a $W_n(\Omega) = [a, +\infty[$.
On note F_n la fonction de répartition de W_n.

- Pour $x \leqslant a$, on a : , $F_n(x) = 0$.
- Soit $x > a$. On a : $F_n(x) = P(W_n \leqslant x) = 1 - P(W_n > x) = 1 - P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > k]\right)$.

  Et par indépendance, on obtient que $F_n(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - \left(\dfrac{a}{x}\right)^{3n}$.

En conclusion, on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant a \\ 1 - \left(\dfrac{a}{x}\right)^{3n} & \text{si} \quad x > a \end{cases}.}$$

La fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en a.
Ainsi : $\boxed{W_n \text{ est bien une variable aléatoire à densité}}$

(b) En dérivant F_n en tout point différent de a, et en choisissant une valeur arbitraire en a, on obtient directement pour W_n une densité en la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geqslant a. \end{cases}}$$

(c) De même que pour X, la variable aléatoire W_n admet une espérance, et :

$$E(W_n) = \int_a^{+\infty} \frac{3na^{3n}}{t^{3n}} dt = 3na^{3n} I_{3n}(a) = \frac{3n}{3n-1}a.$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance, $E\left(\dfrac{3n-1}{3n}W_n\right) = a$.

La variable aléatoire $\boxed{\dfrac{3n-1}{3n}W_n \text{ est un estimateur sans biais pour le paramètre } a}$.

(d) L'estimateur $\dfrac{3n-1}{3n}W_n$ est sans biais, donc son risque quadratique est égal à sa variance. Commençons par calculer le moment d'ordre 2 de W_n :

$$E(W_n^2) = \int_a^{+\infty} \frac{3na^{3n}}{t^{3n-1}}dt = 3na^{3n}I_{3n-1}(a) = \frac{3na^{3n}}{(3n-2)a^{3n-2}} = \frac{3n}{3n-2}a^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} V(W_n) &= \frac{3n}{3n-2}a^2 - \frac{9n^2}{(3n-1)^2}a^2 = 3na^2\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{3n}{(3n-1)^2}\right) \\ &= 3na^2 \times \frac{(3n-1)^2 - 3n(3n-2)}{(3n-2)(3n-1)^2} = \frac{3na^2}{(3n-2)(3n-1)^2}. \end{aligned}$$

Enfin, $r\left(\dfrac{3n-1}{3n}W_n\right) = V\left(\dfrac{3n-1}{3n}W_n\right) = \boxed{\dfrac{a^2}{3n(3n-2)}}$.

7. (a)

```
function V=simulV(a,m,n)
    X=simulX(a,m,n)
    V=zeros(1,m)
    for k= 1:m
        V(k)= mean(X(k,:))*2/3
    end
endfunction
```

(b) Les croix droites du graphique semblent représenter les valeurs prises par $\lambda_n W_n$. En effet, elles sont plus regroupées autour de la valeur a à estimer que les croix obliques, ce qui correspond au fait que le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ est plus faible que celui de V_n.

On complète donc le script comme suit :

```
W=simulW(5,20,100)
V=simulV(5,20,100)
plot2d(W,style=-1)
plot2d(V,style=-2)
```