ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2020

prépa

2

Mathématiques

Option Économique

Mercredi 15 avril 2020 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 5 pages.

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et paginés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Etude du cas où $a = 1$.

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.
2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.
3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$.

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.
5. Démontrer que M n'est pas inversible.
6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1.

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.
8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.
9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.
10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera T.
11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt.$$

Partie A : Étude de la fonction f_n.

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et que :

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.$$

2. Étudier les variations de f_n.
3. Démontrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
4.(a) Démontrer que :

$$\forall t \geqslant 1,\ t^{2n}-1 \geqslant n(t^2-1).$$

(b) Montrer alors que :

$$\forall x \geqslant 1,\ f_n(x) \geqslant f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2.$$

(c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer que $f_n(1) < 0$.
6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite.

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}.$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

8.(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1},\ f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.
(c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
9.(a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $-\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0$.
(b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4(b) de la partie A, montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}.$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables.

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.
L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ G_n(x,y) = f_n(x) \times f_n(y).$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.
12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1,1)$.
13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1,1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

EXERCICE 3

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt.$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \dfrac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geqslant a. \end{cases}$$

(a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

(b) Donner la fonction de répartition de X.

(c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

(d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\dfrac{3a^2}{4}$.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose : $Y = \dfrac{a}{U^{1/3}}$.

(a) Déterminer $Y(\Omega)$.

(b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

(c) Écrire une fonction en langage Scilab d'en-tête : `function Y=simulX(a,m,n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de façon indépendante.
À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m,n)` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0,1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendante.

4.(a) Calculer $P([X > 2a])$.

(b) Calculer $P_{[X>2a]}([X > 6a])$.

(c) On suppose que la fonction Scilab de la question 3 a été programmée correctement et compilée. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```
a=10
N=100000
s1=0
s2=0
X=simulX(a,1,N)
for k=1:N
    if ............ then
        s1=s1+1
        if X(k)>6*a then
            ............
        end
    end
end
if s1>0 then
    disp(..........)
end
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

5. On pose $V_n = \dfrac{2}{3n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a.

(b) Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\dfrac{a^2}{3n}$.

6. On pose $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

(a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.

(b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geqslant a. \end{cases}$$

(c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.
Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a.

(d) Calculer le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\dfrac{a^2}{3n(3n-2)}$.

7. On rappelle que :
   - Si `A` est une matrice Scilab, l'instruction : `A(i,:)` renvoie la $i$ème ligne de la matrice `A`.
   - Si `A` est une matrice Scilab (éventuellement une matrice ligne), l'instruction : `sum(A)` renvoie la somme des coefficients de la matrice `A`.
   - Si `X` est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X,style=-1)` représente graphiquement les coefficients de `X` à l'aide de croix droites.
   - Si `X` est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X,style=-2)` représente graphiquement les coefficients de `X` à l'aide de croix obliques.

   (a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```
function V=simulV(a,m,n)
    X=simulX(a,m,n)
    V=zeros(1,m)
    for k= ..........
        V(k)= ................
    end
endfunction
```

   Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

   (b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
W=simulW(...,...,...)
V=simulV(...,...,...)
plot2d(...,style=-1)
plot2d(...,style=-2)
```

   On justifiera la réponse pour les deux dernières lignes.