2019

CORRIGÉ

Mathématiques

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE ECONOMIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A

1. (a) Après calcul, on obtient : $\boxed{A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$, puis $A^3 = A^2.A = \boxed{0}$.

   (b) $A^3 = 0$, donc le polynôme $P(X) = X^3$ est un polynôme annulateur de A.
   Donc **0, l'unique racine de P, est l'unique valeur propre possible de A.**

   (c) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$u \in \text{Ker}(f) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

   Ainsi, Ainsi, le noyau de f est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $(-1, -1, 1)$. Ce vecteur étant non nul, il constitue une base de $\text{Ker}(f)$:

$$\boxed{\text{Ker}(f) = Vect((-1, -1, 1)) \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(f)) = 1.}$$

   (d) Le noyau de f est de dimension 1, donc 0 est bien valeur propre de f.
   On sait aussi que c'est l'unique valeur propre de f.
   Or, le sous-espace propre de f associé à 0, qui n'est autre que son noyau, est de dimension 1, alors que E est de dimension 3, donc **f n'est pas diagonalisable**.

2. (a) Montrons dans un premier temps que la famille $\mathcal{B}'$ est libre.
   Soient a, b et c trois réels tels que : $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0_E$.

$$\text{On a alors : } \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -a - b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\overset{L_3 \to L_3 + L_1}{\iff}} \begin{cases} -a + 2b - c = 0 \\ -3b + 3c = 0 \\ 3b = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

   Donc la famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre de E. De plus, c'est une famille de cardinal 3 dans l'espace vectoriel E qui est de dimension 3, donc **la famille $\mathcal{B}'$ est une base de E**.

   (b) On sait déjà que $e'_1 \in \text{Ker}(f)$, donc $f(e'_1) = 0_E$. De plus, un calcul donne :

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } f(e'_2) = e'_1 \text{ et } f(e'_3) = e'_2.$$

En conclusion : $\begin{cases} f(e'_1) = 0_E \\ f(e'_2) = 1.e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3 \\ f(e'_3) = 0.e'_1 + 1.e'_2 + 0.e'_3 \end{cases}$, donc T est bien la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

3. (a) On remarque que $M = -A + I$, donc $\boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = 1 \text{ conviennent}}$.

(b) D'après ce qui précède, $h = -f + id_E$, où id_E est l'endomorphisme identité de E. Ainsi,

$$h(e'_1) = e'_1,\ h(e'_2) = -e'_1 + e'_2 \text{ et } h(e'_3) = -e'_2 + e'_3. \text{ Donc } \boxed{M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(c) On remarque que la matrice M' est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont les valeurs situées sur sa diagonale. Donc 1 est l'unique valeur propre de M'. M et M' étant semblables, on en déduit que 1 est aussi l'unique valeur propre de M.
Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de M, et $\boxed{M \text{ est donc inversible}}$.

(d) $(M - I)^3 = (-A)^3 = -A^3 = \boxed{0}$. En développant $(M - I)^3$, on obtient donc la relation :

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0, \text{ ou encore : } M(M^2 - 3M + 3I) = I. \text{ Donc } \boxed{M^{-1} = M^2 - 3M + 3I}$$

(e) Rappelons que $M = -A + I$, et que les matrices $-A$ et I commutent. D'après la formule matricielle du binôme de Newton :

$$\forall n \geqslant 2, \quad M^n = (-A + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^k I^{n-k}$$

On sait alors que $A^3 = 0$, donc par récurrence, on peut montrer que : $\forall k \geqslant 3, \quad A^k = 0$.
Il reste ainsi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad M^n = I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2}.$$

On vérifie ensuite que l'égalité ci-dessus reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui permet de conclure qu'elle est valable pour tout entier naturel n.
Pour $n = -1$, l'égalité ci-dessus devient : $M^{-1} = I + A + A^2$.
Or, on a montré que $M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$, donc :

$$M^{-1} = (-A + I)^2 - 3(-A + I) + 3I = A^2 - 2A + I + 3A - 3I + 3I = A^2 + A + I$$

Donc $\boxed{\text{l'égalité est bien vraie pour } n = -1}$.

Partie B

1. $VT = V.V^2 = V^3 = V^2.V = TV$. De plus, V est la matrice représentative de g dans la base $\mathcal{B}'$ et T est la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, donc $g \circ f = f \circ g$.

2. (a) $f\left(g(e'_1)\right) = f \circ g(e'_1) = g \circ f(e'_1) = g(0_E) = 0_E$, donc $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
On sait par ailleurs que (e'_1) est une base de $Kerf$, donc $g(e'_1)$ appartient à $Vect(e'_1)$.
Autrement dit, il existe un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.

   (b) $f\left(g(e'_2) - ae'_2\right) = f\left(g(e'_2)\right) - af(e'_2) = g\left(f(e'_2)\right) - ae'_1 = g(e'_1) - ae'_1 = 0_E$.
Donc $g(e'_2) - ae'_2$ appartient aussi au noyau de f.
Et de même que dans la question précédente, il existe un réel b tel que $g(e'_2) - ae'_2 = be'_1$.
Ainsi, il existe un réel b tel que $g(e'_2) = be'_1 + ae'_2$.

   (c) $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = g(e'_2) = ae'_2 + be'_1$.
Donc $f\left(g(e'_3) - ae'_3 - be'_2\right) = f \circ g(e'_3) - af(e'_3) - bf(e'_2) = ae'_2 + be'_1 - ae'_2 - be'_1 = 0_E$.
Donc $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2$ appartient au noyau de f.

   (d) D'après ce qui précède, il existe un réel c tel que $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 = ce'_1$,
donc $g(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1$.

   Pour résumer : $\begin{cases} g(e'_1) = ae'_1 \\ g(e'_2) = be'_1 + ae'_2 \\ g(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1 \end{cases}$. Donc $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

3. On obtient : $V^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & ab + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Or $V^2 = T$, donc : $\begin{cases} a^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ ab + 2ac = 0 \end{cases}$

   Ceci implique que $a = 0$, et donc que ... $0 = 1$.
Ce résultat absurde permet d'invalider l'hypothèse de départ, c'est-à-dire qu'il permet de conclure :

   Il n'existe pas d'endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.

EXERCICE 2

Partie A

1. D'après une lecture du graphique, il semblerait que $\boxed{f \text{ admette un minimum local au point } (1,1).}$

   La valeur de ce minimum serait proche de $\boxed{3}$.

2. (a) $(x,y) \mapsto \dfrac{x}{y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas.

   $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ comme inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas.

   $(x,y) \mapsto y^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ comme fonction polynomiale.

   Ainsi, $\boxed{\text{par somme, } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*}$.

   (b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{\partial_1(f)(x,y) = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}}$ et $\boxed{\partial_2(f)(x,y) = -\dfrac{2x}{y^3} + 2y}$.

   Et (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ -\dfrac{2x}{y^3} + 2y = 0 \end{array}\right. \underset{x>0,y>0}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x = y \\ -\dfrac{2}{x} + 2x = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = y \\ 2\dfrac{x^2-1}{x} = 0 \end{array}\right. \underset{x>0,y>0}{\iff} x = y = 1$$

   Donc $\boxed{f \text{ admet un unique point critique : le point } A = (1,1)}$.

   (c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

   $\partial_{1,1}^2(f)(x,y) = \dfrac{2}{x^3}$, $\quad \partial_{1,2}^2(f)(x,y) = \partial_{2,1}^2(f)(x,y) = -\dfrac{2}{y^3}$ et $\partial_{2,2}^2(f)(x,y) = \dfrac{6x}{y^4} + 2$.

   Au point A, on obtient bien la matrice hessienne : $\boxed{H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}}$.

   (d) Cherchons les valeurs propres de H : celles-ci sont les réels λ tels que la matrice $H - \lambda I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire tels que $(2-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0$.

   Or, pour tout réel λ, $(2-\lambda)(8-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 12$. On reconnaît l'expression d'une fonction polynomiale de degré 2, de discriminant $\Delta = 100 - 48 = 52 > 0$.

   H admet donc deux valeurs propres : $\lambda_1 = \dfrac{10+\sqrt{52}}{2} = 5 + \sqrt{13}$ et $\lambda_2 = \dfrac{10-\sqrt{52}}{2} = 5 - \sqrt{13}$.

   $\lambda_1 > 0$, et $\sqrt{13} < \sqrt{16} < 5$, donc $\lambda_2 > 0$.

   H admet ainsi deux valeurs propres strictement positives : $\boxed{f \text{ présente en } A \text{ un minimum local}}$, conformément à la conjecture effectuée à la question 1.

Partie B

1. La fonction h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad h_n'(x) = nx^{n-1} - \dfrac{n}{x^{n-1}} = n\dfrac{x^{2n-2}-1}{x^{n-1}}$.
Donc
$$h_n'(x) \geqslant 0 \iff x^{2n-2} - 1 \geqslant 0 \iff x^{2n-2} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1.$$
h_n' est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$, donc :

la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2. La fonction h_n est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, donc elle réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]h_n(1), \lim\limits_{x\to 0} h_n(x)[=]3,+\infty[$. Or, $4 \in]3,+\infty[$, donc l'équation $h_n(x) = 4$ admet une unique solution sur $]0,1[$ que nous noterons u_n.
De même, La fonction h_n est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]h_n(1), \lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x)[=]3,+\infty[$. Or, $4 \in]3,+\infty[$, donc l'équation $h_n(x) = 4$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$ que nous noterons v_n. Donc :

pour tout entier $n \geqslant 1$ l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions u_n et v_n vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

3. (a) $\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) \; &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - 1 - \frac{1}{x^n} \\ &= x^n(x-1) + \frac{1-x}{x^{n+1}} \\ &= (x-1)\left(x^n - \frac{1}{x^{n+1}}\right) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

   (b) Appliquons l'égalité précédente au réel strictement positif v_n :
$$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = \frac{(v_n-1)(v_n^{2n+1}-1)}{v_n^{n+1}},$$
et puisque $h_n(v_n) = 4$:
$$h_{n+1}(v_n) - 4 = \frac{(v_n-1)(v_n^{2n+1}-1)}{v_n^{n+1}}$$
Et $v_n > 1$, donc $\dfrac{(v_n-1)(v_n^{2n+1}-1)}{v_n^{n+1}} > 0$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geqslant 4.$

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$, donc l'inégalité précédente peut aussi s'écrire :
$$h_{n+1}(v_n) \geqslant h_{n+1}(v_{n+1})$$
De plus, v_n et v_{n+1} appartiennent tous deux à l'intervalle $]1,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction h_n est strictement croissante. Ceci permet de conclure que $v_n \geqslant v_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout entier naturel n non nul, la suite (v_n) est donc décroissante .

4. (a) La suite (v_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers un réel ℓ.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n > 1$, donc par passage à la limite : $\boxed{\ell \geqslant 1}$.

(b) Supposons que $\ell > 1$. La suite (v_n) est décroissante et converge vers ℓ, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \ell$$

En composant par la fonction « puissance n » croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n^n \geqslant \ell^n.$$

Or, $\ell > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell^n = +\infty$, donc par comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty}$

Mais alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n(v_n) = 1 + v_n^n + \frac{1}{v_n^n}, \quad \lim_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{v_n^n} = 0,$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(v_n) = +\infty$.
Ceci est absurde, car on doit avoir pour tout entier naturel n non nul, $h_n(v_n) = 4$.

(c) On a démontré que $\ell \geqslant 1$ mais que ℓ n'est pas stictement supérieur à 1, $\boxed{\text{donc } \ell = 1}$.

5. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n(3) = 1 + 3^n + \dfrac{1}{3^n}$. Et $n \geqslant 1$, donc $3^n \geqslant 3$ et $\dfrac{1}{3^n} \geqslant 0$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n(3) \geqslant 4$, donc $h_n(3) \geqslant h_n(v_n)$.
Toujours par stricte croissance de la fonction h_n sur l'intervalle $]1, +\infty[$, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ v_n \leqslant 3}$$

(b)
```
function y=h(n,x)
    y=1+x^n+1/x^n
endfunction
```

(c)
```
function res=v(n)
        a = 1
        b = 3
        while (b-a)>10^(-5)
                c = (a+b)/2
                if h(n,c) < 4 then a=c
                        else b=c
                end
        end
        res=c
endfunction
```

(d) Le graphique représente les valeurs de v_n^n pour les valeurs de n allant de 1 à 20.
Plus précisément, il trace 20 points de coordonnées (n, v_n^n).
On peut conjecturer que la valeur de v_n^n ne dépend pas de n.

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n(v_n) = v_n^n + \dfrac{1}{v_n^n} + 1 = 4$
En multipliant cette égalité par v_n^n, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (v_n^n)^2 + 1 + v_n^n = 4v_n^n,$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (v_n^n)^2 + 1 - 3v_n^n = 0.$$

Donc le réel v_n^n est solution de l'équation polynomiale de degré 2 : $X^2 - 3X + 1 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 3^2 - 4 = 5 > 0$, donc celle-ci admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Mais $\sqrt{5} > \sqrt{4}$, donc $x_2 < \dfrac{3-2}{2} < 1$. Et $v_n > 1$, donc $v_n^n > 1$, donc nécessairement :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \big(v_n\big)^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

(f) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n^n = x_1$, donc $v_n = x_1^{1/n} = \exp\left(\dfrac{\ln x_1}{n}\right)$.

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln x_1}{n}\right) = 0$, et $\displaystyle\lim_{X\to 0} e^X = 1$, donc par composition :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1}$$

EXERCICE 3

Partie A

1.
   - Si $t \leqslant -1$, $f(t) = -\dfrac{1}{t^3}$. Par ailleurs, $-t \geqslant 1$, donc $f(-t) = \dfrac{1}{(-t)^3} = -\dfrac{1}{t^3}$. Donc $f(t) = f(-t)$.
   - Si $-1 < t < 1$, alors $f(t) = 0$. Par ailleurs, $-1 < -t < 1$, donc $f(-t) = 0$, et ainsi : $f(t) = f(-t)$.
   - Si $t \geqslant 1$, $f(t) = \dfrac{1}{t^3}$. Par ailleurs, $-t \leqslant -1$, donc $f(-t) = -\dfrac{1}{(-t)^3} = \dfrac{1}{t^3}$. Donc $f(t) = f(-t)$.

   Finalement : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(-t) = f(t)$. Donc la fonction f est paire.

2. Pour tout réel $A \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^A f(t)dt = \int_1^A \frac{1}{t^3}dt = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2}$.

   Et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2}\right) = \frac{1}{2}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

3. (a) Soit $A \geqslant 1$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)dt$, on pose $u = -t$ (et donc $du = -dt$).

   On obtient ainsi : $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)dt = \int_A^1 f(-u).(-1).du = \int_1^A f(-u)du.$
   Et f est une fonction paire, donc pour tout réel u, $f(u) = f(-u)$. Ainsi :

   $$\forall A \geqslant 1,\ \int_{-A}^{-1} f(t)dt = \int_1^A f(u)du.$$

   Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{-1} f(t)dt\right) = \int_1^{+\infty} f(u)du = \frac{1}{2}.$

   Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

   (b) La fonction f est définie et positive sur $\mathbb{R}$, et elle est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en -1 et en 1. De plus, d'après les questions précédentes, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$, $\displaystyle\int_{-1}^{-1} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ convergent, donc d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge, et

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

   Donc f est une densité de probabilité.

4. (a) • Si $x \leqslant -1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} -\frac{1}{t^3}dt = \lim_{A \to -\infty} \left[\frac{1}{2t^2}\right]_A^x = \lim_{A \to -\infty} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2A^2}\right) = \frac{1}{2x^2}$

- Si $-1 < x < 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^3}dt + \int_{-1}^{x} 0\ dt = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.
- Si $x \geqslant 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} -\frac{1}{t^3}dt + \int_{-1}^{1} 0\ dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^3}dt = \frac{1}{2} + 0 + \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2x^2}$.

Conclusion :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}}$$

(b) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument.
Or, la fonction f est paire, donc $t \mapsto |t|f(t)$ est paire.
Donc les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)dt$ et $2\int_{0}^{+\infty} |t|f(t)dt$ ont même nature.
Et f est nulle sur $[0, 1[$, donc X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $2\int_{1}^{+\infty} |t|f(t)dt$ converge.
Or, $2\int_{1}^{+\infty} |t|f(t)dt = 2\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$. On reconnaît une intégrale de Riemann convergente, donc

$\boxed{X \text{ admet une espérance}}$.

On peut donc écrire :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^{0} tf(t)dt + \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$$

Et la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire, donc $\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt = -\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$, donc $\boxed{E(X) = 0}$.

(c) $\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}dt$. On reconnaît une intégrale de Riemann divergente, donc :

$\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$

5. (a) La fonction valeur absolue est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc pour tout réel $x < 0$, on a $F_Y(x) = 0$.
Pour $x \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\left(|X| \leqslant x\right) = P\left(-x \leqslant X \leqslant x\right) \\ &= P(X \leqslant x) - P(X < -x) \\ &= F_X(x) - F_X(-x). \end{aligned}$$

Si $x \in]-1,1[$, alors on a $-x \in]-1,1[$ aussi, et donc $F_Y(x) = 0$.
Si $x \geqslant 1$, on a $-x \leqslant -1$, et donc $F_Y(x) = 1 - \dfrac{1}{2x^2} - 1\dfrac{1}{2(-x)^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

Au final, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$$

La fonction F_Y est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et

$$\lim_{x \to 1^-} F_Y(x) = \lim_{x \to 1^+} F_Y(x) = F_Y(1) = 0,$$

donc F_Y est continue en 1, et finalement est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 1.
Donc la variable aléatoire Y est une variable aléatoire à densité.

(b) On obtient une densité de Y en dérivant F_Y en tous points où celle-ci est dérivable (ici en tous points de $\mathbb{R}$ privé de 1), et en donnant une valeur arbitraire en 1.
En posant $f_Y(1) = 2$, on obtient une densité f_Y de Y en posant :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(c) Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)dt$ converge absolument,
c'est-à-dire si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\frac{2}{t^3}dt$ converge.
On reconnaît à nouveau une intégrale de Riemann convergente, donc

$$\boxed{Y \text{ admet une espérance.}}$$

Et :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)dt = \int_1^{+\infty} t\frac{2}{t^3}dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}dt = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{2}{t}\right]_1^A = \boxed{2}.$$

Partie B

1. (a) $Z(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(Z = 0) = P(D = -1) = \dfrac{1}{2}$, et $P(Z = 1) = P(D = 1) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{Z \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}}$, donc $E(Z) = \dfrac{1}{2}$ et $V(Z) = \dfrac{1}{4}$.

Or, par linéarité de l'espérance, $E(Z) = \dfrac{1}{2}E(D) + \dfrac{1}{2}$, donc $E(D) = 2E(Z) - 1 = \boxed{0}$

Et $V(Z) = V\left(\dfrac{1}{2}D + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}V(D)$, donc $V(D) = 4V(Z) = \boxed{1}$.

(b) Les variables aléatoires D et Y sont indépendantes et admettent chacune une espérance, donc T admet une espérance, et

$$E(T) = E(D) \times E(Y) = 0 \times E(Y) = \boxed{0}$$

(c) Soit x un réel fixé.
Le système : $\{[D = -1], [D = 1]\}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T \leqslant x) &= P([D = -1] \cap [T \leqslant x]) + P([D = 1] \cap [T \leqslant x]) \\ &= P([D = -1] \cap [-Y \leqslant x]) + P([D = 1] \cap [Y \leqslant x]) \\ &= P([D = -1] \cap [Y \geqslant -x]) + P([D = 1] \cap [Y \leqslant x]) \end{aligned}$$

Et par indépendance des variables aléatoires D et Y, on obtient :

$$\begin{aligned} P(T \leqslant x) &= P(D = -1) \times P(Y \geqslant -x) + P(D = 1) \times P(Y \leqslant x) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}P(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}P(Y \geqslant -x)} \end{aligned}$$

(d) D'après de qui précède : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \dfrac{1}{2}F_Y(x) + \dfrac{1}{2}(1 - F_Y(-x))$.

Nous distinguerons alors trois cas :

- Si $x \leqslant -1$, $F_Y(x) = 0$ et $F_Y(-x) = 1 - \dfrac{1}{(-x)^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Donc :

$$F_T(x) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2} = F_X(x)$$

- Si $-1 < x < 1$, $F_Y(x) = F_Y(-x) = 0$. Ainsi :

$$F_T(x) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2} = F_X(x)$$

- Si $x > 1$, $F_Y(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $F_Y(-x) = 0$. Donc :

$$F_T(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}(1 - 0) = 1 - \frac{1}{2x^2} = F_X(x)$$

En conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = F_X(x)}$

2. (a) On a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}}$.

(b) On sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est sur l'intervalle $]0,1[$ à valeurs dans $]1,+\infty[$.

- Si $x \leqslant 1$, on a donc $F_V(x) = 0$.
- Si $x > 1$, $F_V(x) = P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-U}} \leqslant x\right) = P\left(\sqrt{1-U} \geqslant \dfrac{1}{x}\right)$.
  En composant par la fonction « racine carrée » strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$F_V(x) = P\left(1-U \geqslant \frac{1}{x^2}\right) = P\left(U \leqslant 1 - \frac{1}{x^2}\right) = F_U\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

  Or, $x > 1$, donc $0 < \dfrac{1}{x^2} < 1$, donc $0 < 1 - \dfrac{1}{x^2} < 1$, donc :

$$F_V(x) = F_U\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

En conclusion :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition caractérise la loi, et Y et V ont la même fonction de répartition.
Donc $\boxed{Y \text{ et } V \text{ suivent la même loi}}$.

3. (a)

```
function a=D(n)
    vec=ones(1,n)
    for i=1:n
        if rand()<1/2 then vec(i)=-1
        end
    end
    a=vec
endfunction
```

On préfèrera peut-être la version plus condensée ci-dessous :

```
function a=D(n)
    a=2*grand(1,n,'bin',1,1/2)-1
endfunction
```

(b) On considère le script suivant :

```
n = input('entrer n')
a=D(n)
b=rand(1,n)
c=a./sqrt(1-b) // il manquait le point dans le sujet original
disp(sum(c)/n)
```

Chaque coefficient de `a` est une simulation de la variable aléatoire D.
Chaque coefficient de `1./sqrt(1-b)` est une simulation de la variable aléatoire V, donc de la variable aléatoire Y.
Ainsi, chaque coefficient de `a./sqrt(1-b)` est une simulation de la variable aléatoire $T = DY$, donc de la variable X.
La valeur affichée est la moyenne des coefficients de c, on peut donc penser qu'elle sera proche de l'espérance de X, c'est-à-dire de 0.