2016

CORRIGÉ

MATHÉMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

OPTION ECONOMIQUE………………

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

ESPRIT GÉNÉRAL

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A

1. On remarque que $E = \{xA + yB, (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(A, B)$.
Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont (A, B) est une famille génératrice. Cette famille est libre car A et B ne sont pas colinéaires. On en déduit que (A, B) est une base de E, et donc $\boxed{\dim(E) = 2}$.

2. Tout d'abord : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   - $$AX = X \iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = x \\ -x + 4y - 2z = y \\ 4y - z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2y \\ x = -y \end{cases} \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

     Ainsi, 1 est bien une valeur propre de A et on $E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   - $$AX = 2X \iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 2x \\ -x + 4y - 2z = 2y \\ 4y - z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{4y}{3} \\ x = -\frac{2y}{3} \end{cases} \iff X = \frac{y}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

     Ainsi, 2 est bien une valeur propre de A et on a $E_2(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   - $$AX = 3X \iff \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3x \\ -x + 4y - 2z = 3y \\ 4y - z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ x = -y \end{cases} \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

     Ainsi, 3 est bien une valeur propre de A et on a $E_3(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. On choisit une base de vecteurs propres en prenant les trois vecteurs propres précédents:
Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. La formule de changement de base donne :

$$A = PD_AP^{-1} \text{ avec } D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Après calcul, on a :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Calculons : $BX_1 = 0$, $BX_2 = -X_2$ et $BX_3 = -X_3$.
On en déduit que X_1, X_2, X_3 sont également des vecteurs propres pour B (car ils sont bien non nuls). On a donc obtenu une base de vecteurs propres de B : B est diagonalisable dans la même base que A.
Les valeurs propres associées sont $0, -1, -1$. Ainsi :

$$B = PD_BP^{-1} \text{ avec } D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $M(x, y) = xA + yB = xPD_AP^{-1} + yPD_BP^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1}$.
En posant $D(x, y) = xD_A + yD_B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$, on obtient : $M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$ avec $D(x, y)$ qui est diagonale.

7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \text{ est inversible } &\iff D(x, y) \text{ est inversible} \\ &\iff x \neq 0, 2x - y \neq 0, 3x - y \neq 0 \end{aligned}$$

8. Calculons :

$$\begin{aligned} B^2 &= PD_BP^{-1}PD_BP^{-1} \\ &= PD_B^2P^{-1} \\ &= P(-D_B)P^{-1} \\ &= -B \end{aligned}$$

Comme E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on en déduit que $-B \in E$ donc $\boxed{B^2 \in E}$.
De la même façon, $A^2 = PD_AP^{-1}$

$$\begin{aligned} A^2 \in E &\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, A^2 = M(x, y) \\ &\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, D_A^2 = D(x, y) \\ &\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 1 = x \\ 4 = 2x - y \\ 9 = 3x - y \end{cases} \\ &\iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 1 = x \\ y = -2 \\ y = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système n'a pas de solution : $\boxed{A^2 \notin E}$.

Partie B

1. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = CX_n$ avec $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} = M(1, 3)$.

3. Pour $n = 0$, on a $C^0 = I_3$, donc on a bien $X_0 = C^0 X_0$.
Pour $n \geqslant 0$, supposons qu'on ait $X_n = C^n X_0$. Alors $X_{n+1} = CX_n = C \times C^n X_0 = C^{n+1} X_0$.
Par récurrence, on a donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = C^n X_0$.
4. On obtient alors, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} X_n &= C^n X_0 = (PD(1,3)P^{-1})^n X_0 = PD(1,3)^n P^{-1} X_0 \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2(-1)^n & 0 \\ -1 & 3(-1)^n & 0 \\ -2 & 4(-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n \\ -1+3(-1)^n \\ -2+4(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit :

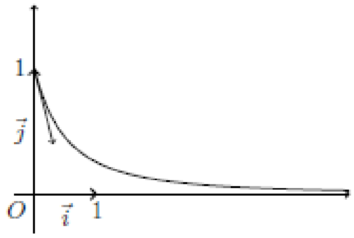
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = 1 - 2(-1)^n \\ b_n = -1 + 3(-1)^n \\ c_n = -2 + 4(-1)^n \end{cases}}$$

La formule n'est pas valable pour $n = 0$.

EXERCICE 2

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}_+,\ g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
   - g_0 est continue sur son ensemble de définition.
   - g_0 est décroissante comme composée d'une fonction croissante ($x \mapsto (x+1)^2$) et d'une fonction décroissante ($u \mapsto 1/u$).
   - $g_0(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$.
   - g_0 est dérivable et $g_0'(0) = -2$. L'équation de la tangente en 0 est donc $y = -2x + 1$.
   -

x	0	$+\infty$
$g_0(x)$	1 ↘	0



   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. g_n est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
   On obtient pour $x \geqslant 0$: $g_n'(x) = \dfrac{n(\ln(1+x))^{n-1} - 2(\ln(1+x))^n}{(1+x)^3}$.
   Comme $\dfrac{(\ln(1+x))^{n-1}}{(1+x)^3} \geqslant 0$, on a : $\boxed{g_n'(x) \geqslant 0 \iff n \geqslant 2\ln(1+x).}$
   Ainsi : g_n est croissante sur $[0, e^{n/2} - 1]$ et décroissante sur $[e^{n/2} - 1, +\infty[$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(\ln(X))^n}{X^2} = 0$ par croissances comparées.

(c) Traçons le tableau de variation de g_n :

x	0	$e^{n/2}-1$	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$	0	$-$
$g_n(x)$	$0 \nearrow$	M_n	$\searrow 0$

On obtient donc un maximum en $e^{n/2}-1$ et $M_n = g_n(e^{n/2}-1) = \dfrac{(n/2)^n}{(e^{n/2})^2} = \boxed{\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n}$.

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$:

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n = \exp\left(n\ln\frac{n}{2e}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{+\infty}$$

(d)

$$\frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = g_n(x).x^{3/2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(x+1))^n}{(x+1)^2}\times(x+1)^{3/2} = \frac{(\ln(x+1))^n}{(x+1)^{1/2}}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x+1))^n}{(x+1)^{1/2}} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{(\ln X)^n}{X^{1/2}} = 0$ par croissance comparée.

On en déduit que : $\boxed{g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)}$.

2. (a) Etudions I_0 . Soit $A \geqslant 0$.

$$\int_0^A g_0(x)\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, I_0 est convergente et $\boxed{I_0 = 1}$.

(b) • g_n est une fonction continue et positive.

• $g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

• $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ est convergente.

On en déduit : $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente et donc $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x$ aussi.

(c) Soit $A \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^A g_{n+1}(x)\mathrm{d}x &= \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{1+x}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \text{ par IPP}\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient : $\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n}$.

(d) On a bien $I_0 = 1 = 0!$.
De plus, si on suppose $I_n = n!$, alors $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)!$.
Ainsi, par récurrence on a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$.

3. (a)
- f_n est positive sur $\mathbb{R}$.
- f_n est continue sauf éventuellement en 0.
- D'après la question précédente, $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 1 d'une part, $\int_{-\infty}^0 f_n(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 0 d'autre part, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

Donc f_n est bien une densité de probabilité.

(b) X_n admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Or, pour $x \geqslant 0$, $|xf_n(x)| = \dfrac{x(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln(1+x))^n}{x}$. Or, à partir de $x \geqslant e-1$, on a $\ln(1+x) \geqslant 1$, donc lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{(\ln(1+x))^n}{x} \geqslant \dfrac{1}{x}$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ est divergente donc par critère de comparaison puis d'équivalence pour les fonctions positives, $\int_0^{+\infty} |xf_n(x)|\mathrm{d}x$ est divergente. On en déduit que X_n n'admet pas d'espérance.

(c) Soit $x < 0$ et $n \geqslant 0$, on a $F_n(x) = 0$.

(d) Soit $x \geqslant 0$. On a : $\boxed{F_0(x) = \dfrac{x}{1+x}}$.

(e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

$$F_k(x) = \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^k}{k!(1+t)^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{(\ln(1+t))^k}{k!(1+t)}\right]_0^x + \int_0^x \frac{k(\ln(1+t))^{k-1}}{k!(1+t)^2}\mathrm{d}t = -\frac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)} + F_{k-1}(x)$$

Donc : $\boxed{F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)}}$

(f) En sommant, les relations précedentes pour k allant de 1 à n, on obtient :
$F_n(x) - F_0(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -\frac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)}$ d'où $\boxed{F_n(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)} + 1}$

(g) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{(\ln(1+x))^i}{i!} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(\ln(1+x)) = 1+x$. Donc $F_k(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1+1 = 0$.
Pour $x < 0$, on a $F_k(x) = 0 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(h) Comme la fonction $x \mapsto 0$ n'est pas une fonction de répartition, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi.

4. (a) Comme X_n prend ses valeurs sur $\mathbb{R}^+$, $Y_n = \ln(1+X_n)$ est bien définie et prend ses valeurs sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Par le théorème de transfert, Y_n admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1+x)f_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. On a :
- $\int_{-\infty}^{0} \ln(1+x)f_n(x)\mathrm{d}x = 0$ car f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$.
- $$\int_0^{+\infty} |\ln(1+x)f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{n!(1+x)^2}\mathrm{d}x = (n+1)\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x = \boxed{n+1}$$

Ainsi $E(Y_n)$ existe et $\boxed{E(Y_n) = n+1}$.

(c) Y_n admet une variance si et seulement si Y_n admet un moment d'ordre 2. Par le théorème de transfert, Y_n admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\ln(1+x))^2 f_n(x)\mathrm{x}$ est absolument convergente.

On a :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \ln(1+x)^2 f_n(x)\mathrm{x} = 0$ car f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$.
- $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |\ln(1+x)^2 f_n(x)|\mathrm{x} &= \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^{n+2}}{n!(1+x)^2}\mathrm{x} \\ &= (n+1)(n+2)\int_0^{+\infty} f_{n+2}(x)\mathrm{x} \\ &= \boxed{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Ainsi $E(Y_n^2)$ existe et $E(Y_n^2) = (n+2)(n+1)$.
On en déduit que $V(Y_n) = E(Y_n^2) - (E(Y_n))^2 = \boxed{(n+1)}$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}H_n(x) &= P(Y_n \leqslant x) \\ &= P(\ln(1+X_n) \leqslant x) \\ &= P(X_n \leqslant e^x - 1) \text{ car exp est croissante.} \\ &= F_n(e^x - 1)\end{aligned}$$

(e) D'après l'expression précédente de H_n , on en déduit que H_n est continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Donc Y_n est à densité et obtient une densité de Y_n par dérivation :

$$h_n(x) = \begin{cases} e^x \times f_n(e^x - 1) = \dfrac{e^{-x}x^n}{n!} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(f) La densité de Y_0 est :

$$h_0(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît la loi exponentielle de paramètre 1. Sous réserve de convergence, le moment d'ordre k de Y_0 est donné par :

$$\begin{aligned}E(Y_0^k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k h_0(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} k! h_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} k! h_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \boxed{k!}\end{aligned}$$

EXERCICE 3

Résultats préliminaires

1. Montrons que X et Y sont échangeables. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} P([X=i]\cap[Y=j]) &= P([X=i])P([Y=j]) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= P([X=j])P([Y=j]) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi.} \\ &= P([X=j]\cap[Y=i]) \text{ par indépendance} \end{aligned}$$

Ainsi, X et Y sont échangeables.

2. Montrons que X et Y ont la même loi. Soit $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P([X=i]\cap[Y=j]) \text{ car } (Y=j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est un SCE} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} P([X=j]\cap[Y=i]) \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont échangeables} \\ &= P(Y=i) \text{ car } (X=j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est un SCE} \end{aligned}$$

Ainsi, X et Y ont même loi.

Étude d'un exemple

3. (a)

```
function res = tirage ( b , n )
        r = rand( )
        if r< b/(b+n) then
                res = 2
        else
                res = 1
        end
endfunction
```

(b)

```
function [ x , y]= experience ( b , n , c , variante )
        x = tirage ( b , n )
        if variante == 1 then
                if x == 1 then
                        n = n+c
                else
                        b = b+c
                end
        else if variante == 2 then
                if x== 1 then
                        b=b+c
                else
                        n=n+c
                end
        y = tirage ( b , n )
endfunction
```

(c)
```
function [ loiX , loiY , loiXY ]= estimation ( b , n , c , variante , N )
        loiX = [ 0 , 0 ]
        loiY = [ 0 , 0 ]
        loiXY = [ 0 , 0 ; 0 , 0 ]
        for k =1:N
                [ x , y]= experience ( b , n , c , variante )
                loiX ( x ) = loiX ( x )+1
                loiY ( y ) = loiY ( y )+1
                loiXY ( x , y )= loiXY ( x , y )+1
        end
        loiX = loiX /N
        loiY = loiY /N
        loiXY = loiXY /N
endfunction
```

(d) • Pour la variante 1, il semble que X et Y soit échangeables, non indépendantes.

• Pour la variante 2, il semble X et Y soient ni échangeables, ni indépendantes.

• Pour la variante 3, il semble que X et Y soient échangeables et indépendantes.

4. (a) D'après le protocole de l'expérience, on a : $P(X=1)=\dfrac{n}{n+b}$ et $P(X=2)=\dfrac{b}{n+b}$.

(b) • $P(X=1\cap Y=1)=P(X=1).P_{X=1}(Y=1)=\dfrac{n}{b+n}.\dfrac{n+c}{b+n+c}$.

• $P(X=1\cap Y=2)=P(X=1).P_{X=1}(Y=2)=\dfrac{n}{b+n}.\dfrac{b}{b+n+c}$.

• $P(X=2\cap Y=1)=P(X=2).P_{X=2}(Y=1)=\dfrac{b}{b+n}.\dfrac{n}{b+n+c}$.

• $P(X=2\cap Y=2)=P(X=2).P_{X=2}(Y=2)=\dfrac{b}{b+n}.\dfrac{b+c}{b+n+c}$.

(c)

$$\begin{aligned}P(Y=1)&=P(Y=1\cap X=1)+P(Y=1\cap X=2)\\&=\frac{n}{b+n}.\frac{n+c}{b+n+c}+\frac{b}{b+n}.\frac{n}{b+n+c}=\frac{n(n+c+b)}{(n+b)(b+n+c)}=\frac{n}{b+n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y=2)&=P(Y=2\cap X=1)+P(Y=2\cap X=2)\\&=\frac{n}{b+n}.\frac{b}{b+n+c}+\frac{b}{b+n}.\frac{b+c}{b+n+c}=\frac{b(n+c+b)}{(n+b)(b+n+c)}=\frac{b}{b+n}\end{aligned}$$

(d) On remarque donc : $P(X = 1 \cap Y = 2) = \frac{n}{b+n} \frac{b}{b+n+c} = P(X = 2 \cap Y = 1)$.

Ainsi, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont échangeables.}}$

Par ailleurs, $P(X = 1 \cap Y = 1) = \frac{n}{b+n} . \frac{n+c}{b+n+c}$

et $P(X = 1)P(Y = 1) = \left(\frac{n}{b+n}\right)^2$. Résolvons :

$$\begin{aligned}
\frac{n}{b+n} . \frac{n+c}{b+n+c} = \left(\frac{n}{b+n}\right)^2 &\iff \frac{n+c}{b+n+c} = \frac{n}{b+n} \\
&\iff (n+c)(b+n) = n(b+n+c) \\
&\iff nb + n^2 + cb + cn = nb + n^2 + nc \\
&\iff cb = 0 \\
&\iff c = 0 \text{ ou } b = 0
\end{aligned}$$

Or ceci est exlu par hypothèse. Ainsi $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$