ECRICOME
VISER PLUS HAUT

CONCOURS D'ADMISSION 2013

2

Mathématiques

Option Economique

Mercredi 17 avril 2013 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :
8h00 – 13h20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page s.v.p.

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

EXERCICE 1

On désigne par $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels et par 0_3 la matrice nulle de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ ainsi que le polynôme R défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

Pour tout réel λ, on pose $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$. Pour finir, on introduit l'application f définie par :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM + MA.$$

1. Montrer que R' (la dérivée de R) admet deux racines réelles distinctes r_1, r_2 avec $r_1 < r_2$ que l'on précisera.

2. Dresser le tableau de variations de R en y ajoutant les valeurs de R en r_1 et r_2.

3. Justifier que R admet trois racines a, b, c avec $0 < a < r_1 < b < r_2 < c$. *On ne cherchera pas à calculer ces racines.*

4. Soit λ un réel, calculer AX_λ puis démontrer que X_λ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si $R(\lambda) = 0$.

5. Etablir l'existence d'une matrice inversible P et d'une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter les matrices P et D en fonction des réels a, b, c.

6. Prouver que f est une application linéaire et que :
$$\forall M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), \quad f(M) = 0_3 \Leftrightarrow DM' + M'D = 0_3,$$
où l'on a posé $M' = P^{-1}MP$.

7. Soit $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$. Déterminer les neuf coefficients de la matrice $DN + ND$. Que dire de N si $DN + ND = 0_3$?

8. Démontrer que f est un isomorphisme.

EXERCICE 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x}.$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

I. Etude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ en faisant apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\varphi(\alpha) = 0.$$

Justifier que $\alpha \in [1, e]$.

II. Etude d'une suite réelle.

On considère la suite u définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = e \ ; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n. \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n > \alpha$.
2. Si cette suite est convergente de limite L, que peut valoir L ?
3. Prouver que la suite u est strictement croissante.

Tournez la page s.v.p.

4. La suite u est-elle convergente ?

5. Soit A un réel. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$:

```
program ecricome2013 ;
var n : integer ;
    u : real ;
    A : real ;
  function g(x : real) : real ;
  begin
  g := .................;
  end;
begin
    writeln('entrer un réel A >0') ;
    readln(A) ;
    u:=exp(1) ; n:=0 ;
    while ................. do
      begin
        .................;
        .................;
      end ;
writeln( .................) ;
end.
```

III. Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que f possède un unique point critique noté A d'abscisse α et d'ordonnée y_α à déterminer en fonction de α.

3. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et établir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha, y_\alpha) = \frac{2\alpha+1}{\alpha^5}.$$

4. La fonction f présente-t-elle un extremum local en A sur l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

EXERCICE 3

Soient n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.

Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).

Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et que les tirages successifs ont donné une boule : « noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche » alors :

- A a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;
- l'urne contient maintenant 8 boules dont deux noires et six blanches ;
- B a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;
- X vaut 1 et Y vaut 4.

I. Etude d'un cas particulier $b = n = 2$.

Pour ce cas particulier on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

1. Donner les probabilités des événements : $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Montrer que la probabilité de l'événement $[Y = 0]$ est donnée par :
$$P([Y = 0]) = \frac{1}{2}.$$
4. Pour tout entier i naturel non nul, déterminer les probabilités suivantes :
$$P([X = 0] \cap [Y = i]), \quad P([X = 1] \cap [Y = i]), \quad P([X = 2] \cap [Y = i]).$$

Tournez la page s.v.p.

5. En déduire la loi de Y. Uniquement à l'aide de l'expression de $P([Y=i])$ en fonction de i, vérifier que :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P([Y=i]) = 1.$$

6. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

II. Retour au cas général.

1. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, calculer la probabilité $P([X=k])$ puis vérifier que :

$$P([X=k]) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.$$

2. Utiliser la question qui précède pour justifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}.$$

Par conséquent, on vient de démontrer la formule suivante :

$$(\mathcal{S}) : \forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{N} \binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1}$$

3. Soient $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$. Comparer $k\binom{k+a}{a}$ et $(a+1)\binom{k+a}{a+1}$ puis justifier que :

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1}.$$

4. A l'aide des questions précédentes, montrer que l'espérance de la variable $n-X$ est donnée par :

$$E(n-X) = \frac{bn}{b+1}.$$

En déduire l'espérance $E(X)$ de X.

5. Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i non nul, déterminer la probabilité suivante :
$$P\left([X = k] \cap [Y = i]\right).$$

6. Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i, non nul, justifier que la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} i \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ est convergente et déterminer sa somme.

7. Montrer que Y admet une espérance et vérifier que :
$$E(Y) = \frac{bn}{b^2-1}.$$

■