ECRICOME 2005
Option Economique

1 EXERCICE

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$
5. Majorer la fonction $g : x \to e^{-2x}$ sur $[0,1]$
6. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n$$
9. En déduire la limite de la suite $(n\, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n\,(n\, I_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c.

2 EXERCICE.

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, & f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \\ & f(0) = -1 \end{cases}$$

le tableau de valeurs de f,

x	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	$-0,5$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

ainsi que les fonctions φ et g définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = x\, e^y - y\, e^x$$

2.1 Etude de deux suites associées à f.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+}$.

2. Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.

3. Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

4. Etudier la nature de la branche infinie.

5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

6. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

7. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que :

$$f(x_k) = k$$

   a) Donner la valeur de x_0.
   b) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
   c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

8. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

   a) Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   b) On donne $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\frac{3}{2}, 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}, 2\right]$
   c) En étudiant les variations de φ', montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$$

   d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation :

$$x = \varphi(x)$$

   e) Montrer successivement que pour tout entier n :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &\leq u_n \leq 2 \\ |u_{n+1} - x_1| &\leq \frac{2}{9}|u_n - x_1| \\ |u_n - x_1| &\leq \left(\frac{2}{9}\right)^n \end{aligned}$$

   f) En déduire la limite de la suite (u_n).

2.2 Recherche d'extremum éventuel de g.

1. Calculer les dérivées partielles premières de la fonction g.

2. Montrer que si g admet un extremum local en (a,b) de $\mathbb{R}^2$ alors :

$$\begin{cases} ab = 1 \\ a = e^{a-\frac{1}{a}} \end{cases}$$

   En déduire que nécessairement :

$$\begin{cases} a > 0 \\ ab = 1 \\ f(a) = 0 \end{cases}$$

   et donc que le seul point où g peut admettre un extremum est le couple $(1,1)$

3. Calculer les réels :

$$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1), \quad s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1), \quad t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1)$$

4. La fonction g admet-elle un extremum local sur $\mathbb{R}^2$?

3 EXERCICE

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement :"deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$".
On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

- Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = p(A_n)$
- avec la convention $a_0 = 0$

3.1 Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2 - q\,x - p\,q$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 $(r_1 < r_2)$. Exprimer $r_1 + r_2$, $r_1 r_2$ en fonction de p et q.

2. Calculer $f(1), f(-1), f(0)$.

3. En déduire l'encadrement suivant :

$$|r_1| < |r_2| < 1$$

3.2 Equivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :

   - on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, A_n est réalisé

     ou
   - on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé.

   montrer que l'on a, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+2} - q\, a_{n+1} - p\, q\, a_n = 0$$

3. Ecrire un programme, en langage Pascal, permettant de calculer a_n, l'entier n, les réels p et q étant donnés par l'utilisateur.
4. Montrer que pour tout entier, naturel n,

$$a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} = [r_2^n - r_1^n]$$

5. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers plus l'infini.

3.3 Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices unicolonnes X_n par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n : \quad X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$X_{n+1} = A\, X_n$$

2. Montrer que les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ ne sont pas inversibles. (I désigne la matrice carrée unité d'ordre 2).
3. En déduire que A est diagonalisable.
4. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
5. Calculer la matrice $D = P^{-1} A\, P$. (Les coefficients de la matrice D seront exprimés en fonction de r_2 et r_1 seulement).
6. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$X_n = P\, D^n P^{-1} X_0$$

7. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_2, r_1, P et n.

3.4 Etude du temps d'attente du premier double pile .

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile.
Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$p\left[T = n+1\right] = a_n$$

1. Montrer que T est une variable aléatoire, c'est-à-dire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p\left[T = n+1\right] = 1$$

2. Prouver que T admet une espérance $E\left(T\right)$ et que:

$$E\left(T\right) = \frac{1+p}{p^2}$$