

## EXERCICE 1

On considère l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$  et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est la matrice  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

### 1. Calcul des puissances de $A$

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $u = (x, y, z)$  alors

$$\begin{aligned} (f - \alpha Id)(u) = 0 &\iff \begin{cases} (3 - \alpha)x - 2y + 3z = 0 & L1 - (3 - \alpha)L2 \\ x - \alpha y + 2z = 0 \\ (2 - \alpha)z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\alpha(3 - \alpha) - 2)y + (3 - 2(3 - \alpha))z = 0 & L1 - (3 - \alpha)L2 \\ x - \alpha y + 2z = 0 \\ (2 - \alpha)z = 0 \end{cases} \\ &\iff (1) \begin{cases} (-\alpha^2 + 3\alpha - 2)y + (2\alpha - 3)z = 0 & L1 - (3 - \alpha)L2 \\ x - \alpha y + 2z = 0 \\ (2 - \alpha)z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Si  $\alpha = 2$  alors (1)  $\iff \begin{cases} z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases}$

0 n'est donc pas la seule solution et 2 est valeur propre associée au sous espace propre  $E_2 = \text{Vect}\{(2, 1, 0)\}$

- Si  $\alpha \neq 2$  alors (1)  $\iff$  (2)  $\begin{cases} (-\alpha^2 + 3\alpha - 2)y = 0 \\ x - \alpha y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$-\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0$  a pour solutions 2 et 1 donc

- si de plus  $\alpha \neq 1$  alors (2)  $\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  donc  $\alpha$  n'est pas valeur propre.

- par contre si  $\alpha = 1$  alors (2)  $\iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$  donc  $\alpha = 1$  est valeur propre associée au sous espace propre  $E_1 = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$ .

Donc les valeurs propres de  $f$  sont  $\lambda_1 = 1 < \lambda_2 = 2$

**Remarque :** on prend soin de vérifier les produit  $AU_1$  et  $AU_2$

2. Comme 0 n'est pas valeur propre de  $A$  alors  $A$  est inversible.

3. Soit  $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$ .  $(\vec{u}_1)$  est génératrice de  $E_1$ . Et comme  $\vec{u}_1 \neq 0$  cette famille, d'un vecteur, est libre.

Donc  $(\vec{u}_1)$  est une base du sous espace propre associé à 1

De même avec  $\vec{u}_2 = (2, 1, 0)$ ,  $(\vec{u}_2)$  est une base du sous espace propre associé à 2.

4. Comme la dimension des sous espaces propres est 1, la somme des dimensions des sous espace propres est  $2 \neq 3$

Donc  $f$  n'est pas diagonalisable.

5. **Attention** : on demandait ici le vecteur... Il convenait donc d'en trouver un et de et de montrer que c'était le seul.

Le vecteurs  $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$  convient. Comme les vecteurs propres associés à 1 sont  $\alpha(1, 1, 0) = (\alpha, \alpha, 0)$ , il n'y en a pas d'autre qui convienne.

6. De même le vecteur  $\vec{u}_2 = (2, 1, 0)$  est le seul qui convient

7. Soient  $x, y, z$  trois réel.

Si  $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 = 0$  alors  $(x + 2y + z, x + y + z, z) = 0$  donc  $z = 0$  et  $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$  donc  $x = y$  et  $3y = 0$  **d'où** finalement  $y = x = z = 0$ .

La famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est donc libre. Comme elle a 3 vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  de dimension 3,  $\mathcal{C}$  est une base de  $E$ .

8. La matrice de passage  $P$  de la la base  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{C}$  est celle qui contient les coordonnées (en colonne) dans la base  $\mathcal{B}$  des vecteurs de  $\mathcal{C}$ .

Comme  $\mathcal{B}$  est la base canonique, les coordonnées des vecteurs sont leurs composantes.

$$\text{Donc } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base  $\mathcal{C}$  à la base  $\mathcal{B}$  est l'inverse de  $P$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L2 - L1 & \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L1 + 2L2 \\ -L2 \end{matrix} \\ & \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L1 - L3 \\ & \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**remarque** : là encore on n'oublie pas de vérifier au brouillon que  $PP^{-1} = I$

9. Pour calculer  $f(\vec{u}_3)$ , comme on dispose de la matrice de  $f$  dans la base canonique, on calcule ses coordonnées dans cette base :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc  $f(\vec{u}_3)$  a pour coordonnées dans la base canonique  $(4, 3, 2)$  et  $f(\vec{u}_3) = (4, 3, 2) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$

**10. Attention :** On n'utilise surtout pas ici la formule de changement de base (ce ne serait pas une déduction)

La base  $\mathcal{C}$  est  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

Comme  $f(\vec{u}_1) = 1\vec{u}_1$ , ses coordonnées dans  $\mathcal{C}$  sont donc  $(1, 0, 0)$

De même  $f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_2$  et ses coordonnées dans  $\mathcal{C}$  sont donc  $(0, 2, 0)$

Et enfin on vient de voir que  $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$  qui a pour coordonnées dans  $\mathcal{C}$  :  $(0, 1, 2)$

Donc la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{C}$  est la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**11.** D'après la formule de changement de base on a alors :  $A = PTP^{-1}$

**12.** Par récurrence on a :

- pour  $n = 1$  :  $T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$  avec  $\alpha_1 = 1$

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$  alors

$$T^{n+1} = T.T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2\alpha_n + 2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

donc avec  $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$  la relation est bien vérifiée pour  $T^{n+1}$

- Par récurrence,  $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$  pour tout entier  $n \geq 1$  avec  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$

**13.** Par récurrence on a

- $\alpha_1 = 1 = 1 \cdot 2^{1-1}$
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\alpha_n = n2^{n-1}$  alors  $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n = 2n2^{n-1} + 2^n = 2^n(n+1) = (n+1)2^{n+1-1}$
- Donc pour tout entier  $n \geq 1$   $\alpha_n = n2^{n-1}$

Finalement pour  $n = 0$  on a  $A^0 = I$  et pour  $n \geq 1$  :  $A^n = PT^n P^{-1}$

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2^n & -2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} & -1 + (n+1)2^n \\ -1 + 2^n & 2 - 2^n & -1 + (n+2)2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**remarque :** on le vérifie pour  $n = 1$

## 2. Matrices commutant avec $A$ .

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble  $C(A)$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  des matrices  $M$  telles que :

$$AM = MA$$

1. La matrice nulle vérifie  $0 \cdot A = 0 = A \cdot 0$  donc  $0 \in C(A)$

Soient  $M$  et  $N$  de  $C(A)$  et  $x$  et  $y$  des réels alors

$A(xM + yN) = xAM + yAN = xMA + yNA = (xM + yN)A$  donc  $xM + yN \in C(A)$  et  $C(A)$  est stable par combinaison linéaire.

Donc  $C(A)$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. Pour  $M$  appartenant à  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  on pose  $M' = P^{-1}MP$ .

On a  $M = PM'P^{-1}$

$$\begin{aligned} AM = MA &\iff PTP^{-1}PM'P^{-1} = PM'P^{-1}PTP^{-1} \\ &\iff PTM'P^{-1} = PM'TP^{-1} \\ &\iff TM' = M'T \end{aligned}$$

en multipliant ) gauche par  $P^{-1}$  et à droite par  $P$  (inversibles d'où l'équivalence)

3. On pose la matrice  $M' = \begin{pmatrix} a & x & y \\ z & b & u \\ v & w & c \end{pmatrix}$ . On calcule  $TM'$  et  $M'T$  et on traduit l'égalité :

$$TM' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x & y \\ z & b & u \\ v & w & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 2z + u & 2b + v & w + 2c \\ 2u & 2v & 2w \end{pmatrix}$$

$$M'T = \begin{pmatrix} a & x & y \\ z & b & u \\ u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2x & x + 2y \\ z & 2b & b + 2c \\ u & 2v & v + 2w \end{pmatrix}$$

Donc  $TM' = M'T$  équivaut au système de 9 équations :

$$\begin{cases} a = a & x = 2x & y = x + 2y \\ 2z + u = z & 2b + v = 2b & w + 2c = b + 2c \\ 2u = u & 2v = 2v & 2w = v + 2w \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 0 & x = 0 & y = -x \\ z = -u & v = 0 & w = b \\ u = 0 & 0 = 0 & v = 0 \end{cases} \text{ et par substitution}$$

$\iff x = y = z = u = v = 0$  et  $w = b$  (avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ )

Donc  $TM' = M'T$  si et seulement si  $M'$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$  où  $a, b, c$  sont trois réels quelconques.

4. Finalement  $M$  appartient à  $C(A)$  si et seulement si  $AM = MA$  si et seulement si  $M = PM'P^{-1}$  avec  $M'$  donné ci dessus.

Donc  $M \in C(A) \iff$

$$\begin{aligned}
M &= PM'P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 2a & -a \\ b & -b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+2c+b \\ -a+b & 2a-b & -a+c+b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$

5. On a donc une écriture paramétrée de  $C(A)$  :

$$\begin{aligned}
C(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

La famille  $\left( \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$  est donc génératrice de  $C(A)$ .

Si  $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0$  alors  $\beta = 0$  (ligne 3 colonne 3) Donc  $\alpha = 0$  (ligne 2 colonne 2) d'où  $\gamma = 0$ . et la famille est donc libre.

C'est donc une base de  $C(A)$  qui est donc de dimension 3.

## EXERCICE 2

### 1. Etude des fonctions $ch$ , $sh$ , et $f$ .

1.  $ch$  et  $sh$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $-x \in \mathbb{R}$  et :

$$\begin{aligned}
ch(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x) \\
sh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -sh(x)
\end{aligned}$$

Donc  $ch$  est parie et  $sh$  est impaire.

2.  $sh$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 (= ch(x))$  donc  $sh$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

En  $+\infty$  :  $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \rightarrow +\infty$  et comme  $sh$  est impaire en  $-\infty$  :  $sh(x) \rightarrow -\infty$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$sh(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

et on a donc  $sh > 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $sh < 0$  sur  $\mathbb{R}_-^*$  et nulle en 0.

3. On a en factorisant :

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} (1 - e^{-2x})$$

$$\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

car  $1 - e^{-2x} \rightarrow 1$

On a donc une branche parabolique verticale en  $+\infty$

4. la fonction  $sh$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $] \lim_{-\infty} sh, \lim_{+\infty} sh[ = \mathbb{R}$

5.  $ch$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $ch'(x) = sh(x)$ .

En  $+\infty$  :  $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow +\infty$  d'où les variations de  $ch$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$ch'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$sh(x)$	$+\infty$	$\searrow \quad 1 \quad \nearrow$	$+\infty$

6. Pour montrer que  $ch(x) > sh(x)$ , on calcule la différence :

$$ch(x) - sh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{2e^{-x}}{2} > 0$$

donc pour tout réel  $x$  :  $ch(x) > sh(x)$

7. Il convient de respecter les symétries, les positions relatives, de donner la tangente en 0 (seul point particulier) et bien former des branches paraboliques.

$$sh'(0) = ch(0) = 1$$

8.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x \neq 0$  :

$$f(-x) = \frac{-x}{sh(-x)} = \frac{-x}{-sh(x)} = f(x)$$

et  $f(-0) = 1 = f(0)$  donc  $f$  est paire.

9. On a  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  donc

$$sh(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) - \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x^3 \varepsilon(-x) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 2x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x) \right]$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x)$$

qui est le développement limité de  $sh$  à l'ordre 3 en 0.

10. On a alors quand  $x \rightarrow 0$ ,  $x \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{sh(x)} = \frac{x}{x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon_2(x)} \\
&\rightarrow 1 = f(0)
\end{aligned}$$

donc  $f$  est continue en 0.

Pour la dérivabilité on calcule le taux d'accroissement

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{x}{sh(x)} - 1}{x} = \frac{x - sh(x)}{xsh(x)} \\
&= \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)}{x(x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x))} = \frac{\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)}{x^2(1 + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon_2(x))} \\
&= \frac{\frac{x}{6} + x\varepsilon_2(x)}{1 + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon_2(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$

**Remarque :** cela est rassurant pour une fonction paire.

11.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  comme quotient de fonction dérivable avec  $sh(x) \neq 0$  et pour  $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{sh(x) - xch(x)}{sh(x)^2} = \frac{h(x)}{sh(x)^2}$$

12.  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned}
h'(x) &= ch(x) - (ch(x) + xsh(x)) \\
&= -xsh(x)
\end{aligned}$$

en  $+\infty$  :

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{xe^x}{2} \left( \frac{1 - e^{-2x}}{x} - 1 - e^{-2x} \right) \rightarrow -\infty
\end{aligned}$$

et comme  $h$  est impaire, en  $-\infty$  :  $h(x) \rightarrow +\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) = shx - xch(x)$$

d'où le signe de  $h(x)$  :

$x$	$-\infty$	$-$	$0$	$+$	$+\infty$
$sh(x)$		$-$	$0$	$+$	
$-xsh(x)$		$-$	$0$	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow +$	$0$	$- \searrow$	$-\infty$

13. D'où finalement le sens de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-$	$0$	$+$	$+\infty$
$h(x)$		$+$	$0$	$-$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	
$f(x)$	$0$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$	$0$

En  $+\infty$  on a :  $f(x) = \frac{x}{sh(x)} = \frac{2x/e^x \rightarrow 0}{2sh(x)/e^x \rightarrow 1} \rightarrow 0$  en utilisant  $sh(x) \sim e^x/2$

On a donc une asymptote horizontale en  $+\infty$  et par symétrie en  $-\infty$ .

## 2. Etude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1. Comme  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  si  $0.8 \leq x \leq 1$  alors  $1 \geq f(0.8) \geq f(x) \geq f(1) \geq 0.8$  donc  $f([0.8, 1]) \subset [0.8, 1]$ ,

On a alors par récurrence :

- $u_0 = 1 \in [0.8, 1]$
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n \in [0.8, 1]$  alors  $u_{n+1} = f(u_n) \in [0.8, 1]$
- Donc par récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0.8, 1]$

2. l'équation  $f(x) = x$  n'est pas vérifiée pour  $x = 0$

$$\text{Pour } x \neq 0 \text{ on a } f(x) = x \iff \frac{x}{sh(x)} = x \iff sh(x) = 1$$

Or  $sh$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et comme  $1 \in \mathbb{R}$  l'équation  $sh(x) = 1$  a une unique solution  $\alpha$

3. De plus  $sh(0.8) < 1 = sh(\alpha) < sh(1)$  d'après les valeurs approchées.

et comme  $sh$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ,  $0.8 \leq \alpha \leq 1$

$$\text{On a } f'(x) = \frac{h(x)}{sh(x)^2}$$

Si  $0.8 \leq x \leq 1$  on a alors  $0 \geq h(0.8) \geq h(x) \geq h(1)$  car  $h$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$

de plus  $sh(0.8) \leq sh(x) \leq sh(1)$  car la fonction  $sh$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

Donc  $sh^2(0.8) \leq sh^2(x) \leq sh^2(1)$  car la fonction carré est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et que tous ces termes sont positifs.

D'où  $\frac{1}{sh^2(0.8)} \geq \frac{1}{sh^2(x)} \geq \frac{1}{sh^2(1)}$  car la fonction inverse est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que tous les termes sont strictement positifs.

Pour faire le produit des inégalités, on a besoin de termes positifs :  $0 \leq -h(0.8) \leq -h(x) \leq -h(1)$

$$\frac{-h(1)}{sh^2(0.8)} \geq \frac{-h(x)}{sh^2(x)} \geq \frac{-h(0.8)}{sh^2(1)}$$

donc

$$\frac{h(1)}{sh^2(0.8)} \leq f'(x) \leq \frac{h(0.8)}{sh^2(1)} \leq 0$$

4. On utilise alors l'inégalité des accroissements finis :

$$\text{Sur } [0.8, 1] \text{ on a } |f'(x)| = -f'(x) \leq \frac{-h(1)}{sh^2(0.8)} \leq 0.5$$

et pour tout entier  $n$  :  $u_n$  et  $\alpha \in [0.8, 1]$  donc  $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq 0.5 |u_n - \alpha|$  et  $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.5 |u_n - \alpha|$

d'où par récurrence :

- comme  $u_0 = 1$  et  $0.8 \leq \alpha \leq 1$  alors  $-0.2 \leq 1 - \alpha \leq 0$  donc  $|u_0 - \alpha| \leq 0.2$
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $|u_n - \alpha| \leq 0.2 (0.5)^n$  alors  $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.5 |u_n - \alpha| \leq 0.2 (0.5)^{n+1}$
- Donc, par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq 0.2 (0.5)^n$

5. Comme  $|0.5| < 1$  on a  $0.5^n \rightarrow 0$  et par encadrement  $u_n - \alpha \rightarrow 0$  et  $u_n \xrightarrow{\wedge} \alpha$

6. Pour calculer  $u_{10}$  on affecte à une même variable  $u$  les valeurs successives de  $u_0$  à  $u_{10}$ .

Il faut donc calculer les valeurs suivantes de  $u_1$  à  $u_{10}$  :

$$\text{on a } f(u_n) = \frac{u_n}{\text{sh}(u_n)} = \frac{2u_n}{e^{u_n} - e^{-u_n}}$$

program suite;

var u:real;n:integer;

begin

u:=1;

for n:=1 to 10 do u:=2\*u/(exp(u)-exp(-u));

writeln(u)

end.

## EXERCICE 3

P

Partie 1.

1. Pour un objet pris à la sortie,  $P(A) = 0.6$  et  $P(B) = 0.4$

Soit  $D$  = "l'objet est défectueux".

On a  $P(D/A) = 0.1$  et  $P(D/B) = 0.2$  et comme  $(A, B)$  est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(D) &= P_A(D)P(A) + P_B(D)P(B) \\ &= 0.1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

Si l'objet est défectueux, la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" est  $P(A/D)$  que l'on calcule par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A)P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.14} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par  $A$  est une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 20$ .

On considère la variable aléatoire  $X$  représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne  $A$  en une heure.

- a) On a  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$  et pour tout entier  $n$  :  $P(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ .  $E(Y) = \lambda = 20$  et  $V(Y) = \lambda = 20$

- b) Quand  $Y = n$ ,  $X$  est le **nombre** d'objet défectueux parmi  $n$ , qui sont défectueux **indépendamment** les un des autres avec une même probabilité 0.1. Donc  $X/Y = n \leftrightarrow \mathcal{B}(n, 0.1)$  et

$$P_{Y=n}[X = k] = 0 \text{ si } k > n \text{ et } P_{Y=n}[X = k] = \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \text{ si } k \leq n$$

c) Comme  $(Y = n)_{n \in \mathbb{N}}$ , est un système complet d'événements on a pour tout entier  $k$  :

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{Y=n}[X = k] P(Y = n)$$

série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que  $n \geq k$  ou  $n < k$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^M P_{Y=n}[X = k] P(Y = n) &= \sum_{n=0}^{k-1} P_{Y=n}[X = k] P(Y = n) \\ &\quad + \sum_{n=k}^M P_{Y=n}[X = k] P(Y = n) \\ &= 0 + \sum_{n=k}^M \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{20^n e^{-20}}{n!} \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20} \sum_{n=k}^M \frac{n!}{k!(n-k)!n!} (0.9 \cdot 20)^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^M \frac{1}{(n-k)!} 18^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{M-k} \frac{1}{m!} 18^{m+k} \\ &\rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} 18^k e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!} \end{aligned}$$

donc  $X \hookrightarrow P(2)$

## Partie 2.

1. On vérifie les caractéristiques d'une densité :

- $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$
- continue sur  $\mathbb{R}^*$
- $f$  est prolongeable à gauche et à droite en 0 donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  est impropre en  $\pm\infty$ .

$$\int_{-\infty}^0 f = \int_{-\infty}^0 0 = 0 \text{ (converge)}$$

$$\int_0^X f = \int_0^X \frac{2}{(1+t)^3} dt = \left[ -\frac{1}{(1+t)^2} \right]_0^X = 1 - \frac{1}{(1+X)^2} \rightarrow 1$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} f \text{ converge et vaut 1 et } \int_{-\infty}^{+\infty} f \text{ converge et vaut 1}$$

Donc  $f$  est bien une densité de variable aléatoire.

2. On a  $F_Z(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  donc

- si  $x < 0$  :  $F_Z(x) = 0$
- si  $x \geq 0$  :  $F_Z(x) = \int_{-\infty}^0 0 + \int_0^x f = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$

3. l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt$  n'est impropre qu'en  $+\infty$

En  $+\infty$  on a un équivalent simple :  $\frac{2t}{(1+t)^3} = \frac{2t}{t^3(1+1/t)^3} \sim \frac{2}{t^2} > 0$

Or l'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  est convergente car  $2 > 1$

Donc par comparaison d'intégrale à termes positifs,  $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt$  converge.

On effectue le changement de variable ( $u$  est de classe  $C^1$  sur  $[1, X+1]$ )  $u = t + 1 : du \leftrightarrow dt : t = 0 \leftrightarrow u = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{2t}{(1+t)^3} dt &= \int_1^{X+1} \frac{2(u-1)}{u^3} du = \int_1^{X+1} \frac{2}{u^2} - \frac{2}{u^3} du \\ &= \left[ \frac{-2}{u} + \frac{1}{u^2} \right]_1^{X+1} = \frac{-2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + 1 \\ &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

donc  $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt = 1$

4. Espérance ?

On étudie la convergence  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  impropre en  $\pm\infty$ .

- $\int_{-\infty}^0 tf(t) dt = 0$
- $\int_0^{+\infty} tf(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt = 1$  (d'après la question précédente)
- donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  converge et  $Z$  admet une espérance  $E(Z) = 1$

5. Comme  $\frac{2t^2}{(1+t)^3} \sim \frac{2}{t}$  dont l'intégrale diverge en  $+\infty$ , alors  $Z^2$  n'a pas d'espérance et  $Z$  n'a pas de variance.

6. Dans cette partie, on suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes d'une pièce par la chaîne  $A$  (respectivement  $B$ ) est une variable aléatoire  $Z_1$  (respectivement  $Z_2$ ) où  $Z_1$  et  $Z_2$  sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que que  $Z$ .

a) On considère les événements :

$C =$  "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaîne  $B$  est supérieur à 2 minutes" =  $(Z_2 > 2)$ .

$D =$  "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaîne  $B$  est inférieur à 3 minutes" =  $(Z_2 < 3)$

$$P(C) = P(Z_2 > 2) = 1 - F_Z(2) = \frac{1}{(1+2)^2} = \frac{1}{9}$$

$$P(D) = P(Z_2 < 3) = F_Z(3) = 1 - \frac{1}{(1+3)^2} = \frac{15}{16}$$

$P_C(D)$  est moins immédiat :

$$\begin{aligned} P_C(D) &= \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{P(2 < Z_2 < 3)}{P(C)} = \frac{F(3) - F(2)}{P(C)} \\ &= 9 \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) = 1 - \frac{9}{16} \\ &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

b) On note  $T = \max(Z_1, Z_2)$  et  $G_T$  la fonction de répartition de  $T$ .

i. Le plus grand est inférieur à  $x$  signifie qu'ils sont chacun inférieur à  $x$ .

$$\text{Donc } (T \leq x) = (Z_1 \leq x) \cap (Z_2 \leq x)$$

ii. Donc comme les deux sont indépendantes,

$$\begin{aligned} G_T(x) &= P(Z_1 \leq x) P(Z_2 \leq x) \\ &= [F_Z(x)]^2 \end{aligned}$$

c) IL suffit de montrer que la fonction de répartition de  $T$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  sauf en un nombre fini de points.

Or  $F_Z$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  (fonction de répartition d'une densité)

Donc comme composée,  $G_T$  l'est aussi et  $T$  est une variable aléatoire à densité de densité  $g(t) = G'(t) = 2F_Z(t)f(t)$  (on donne arbitrairement cette valeur en 0 également)

### Partie 3.

On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne  $A$  puis par la chaîne  $B$ .

Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne  $A$  est une variable aléatoire  $M$  suivant une loi exponentielle de paramètre 2.

Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne  $B$  est une variable aléatoire  $N$  suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$

Les variables  $M$  et  $N$  sont indépendantes.

1. Une densité de  $M$  est :  $v(t) = 0$  sur  $\mathbb{R}^-$  et  $v(t) = 2e^{-2t}$  sur  $\mathbb{R}^+$

une densité de  $N$  est :  $w(t) = 1$  sur  $[0, 1]$  et 0 ailleurs

2. Le temps total de fabrication est la somme des temps de passage sur  $A$  et  $B$ .

$$\text{Donc } S = N + M$$

$$\text{Donc le temps moyen de fabrication d'une pièce est : } E(S) = E(M) + E(N) = \frac{1}{2} + \frac{1-0}{2} = 1$$