ECRICOME 2003
option ECONOMIQUE
EXERCICE 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcul des puissances de A

1. Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de l'endomorphisme f, avec $\lambda_1 < \lambda_2$
2. La matrice A est-elle inversible ? (On ne demande pas la matrice A^{-1}).
3. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de f.
4. Justifier que f n'est pas diagonalisable.
5. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de E vérifiant :
   - $\overrightarrow{u_1}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_1
   - la première composante de $\overrightarrow{u_1}$ est l.
6. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ de E vérifiant :
   - $\overrightarrow{u_2}$ est un vecteur propre de f associe à la valeur propre λ_2
   - la deuxième composante de $\overrightarrow{u_2}$ est l.
7. Soit $\overrightarrow{u_3} = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{C} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une basede E.
8. Déterminer la matrice de passage P de la la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ puis la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
9. Montrer que : $f(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{u_2} + 2\overrightarrow{u_3}$
10. En déduire que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est la matrice:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Rappeler la relation matricielle entre A et T.
12. Prouver que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ il existe un réel α_n tel que :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

   On donnera le réel α_1 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n

13. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = n2^{n-1}$$

En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.

2. Matrices commutant avec A.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble $C(A)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices M telles que :

$$AM = MA$$

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. Pour M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on pose $M' = P^{-1}MP$.

Montrer que :

$$AM = MA \Longleftrightarrow TM' = M'T$$

(T est définie dans la question **1**.10)

3. Montrer qu'une matrice M' de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) vérifie $TM' = M'T$ si et seulement si M' est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois réels.

4. En déduire que M appartient à $C(A)$ si et seulement si il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

5. Déterminer alors une base de $C(A)$ ainsi que la dimension de $C(A)$.

EXERCICE 2

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{sh(x)} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Etude des fonctions ch, sh, et f.

1. Etudier la parité des fonctions ch et sh.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $sh(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $sh(x)$. En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction sh en $+\infty$.

4. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

5. Etudier les variations de la fonction ch.

6. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ch\,(x) > sh\,(x)$$

7. Donner sur un méme graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh.

8. Etudier la parité de la fonction f.

9. Déterminer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fontion sh.

10. En déduire que la fonction f est continue en 0, dérivable en 0 et déterminer $f'\,(0)$.

11. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'\,(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

12. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad h\,(x) = shx - xch\,(x)$$

Etudier les variations de h, puis en déduire le signe de $h\,(x)$.

13. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f. (On ne cherchera pas les points d'inflexion).

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On donne :

$$\begin{aligned} f\,(0.8) &\simeq 0.9, \quad f(1) \simeq 0.85, \\ sh(0.6) &\simeq 0.64, \quad sh(0.8) \simeq 0.89, \quad sh(1) \simeq 1.18, \quad sh(1.2) \simeq 1.51 \end{aligned}$$

1. Justifier que $f\,([0.8, 1]) \subset [0.8, 1]$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0.8, 1]$$

2. Montrer que l'équation $f\,(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser la question **1.4,** sans cherche à déterminer α).

3. Donner um encadrement de α et justifier que :

$$\forall x \in [0.8, 1]\,, \quad \frac{h\,(1)}{sh^2\,(0.8)} \leq f'\,(x) \leq \frac{h\,(0.8)}{sh^2\,(1)}$$

4. On donne :

$$\frac{h\,(1)}{sh^2\,(0.8)} \simeq -0.47 \text{ et } \frac{h\,(0.8)}{sh^2\,(1)} \simeq -0.13$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq 0.5\,|u_n - \alpha|$$

Puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq 0.2\,(0.5)^n$$

5. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

6. Ecrire un programme en Turbo-Pascal permettant de calculer et d'afficher u_{10}

EXERCICE 3

Sous diverses hypothèses, l'exercice étudie différentes situations probabilistes concernant une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre.
Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

Partie 1.

On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" .

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.

   On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

   a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.
   b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P\left[X = k/Y = n\right]$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
   c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Partie 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ f(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire Z

2. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.

3. Justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt$$

   La calculer en effectuant le changement de variable $u = t + 1$.

4. Prouver que Z admet une espérance et la déterminer.

5. Z admet-elle une variance ?

6. Dans cette partie, on suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes d'un pièce par la chaîne A (respectivement B) est une variable aléatoire Z_1 (respectivement Z_2) où Z_1 etZ_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que que Z.

a) On considère les événements :
$C =$ "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaine B est supérieur à 2 minutes".
$D =$ "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaîne B est inférieur à 3 minutes".
Calculer les probabilités suivante : $P(C), P(D), P(D/C)$.

b) On note $T = \max(Z_1, Z_2)$ et G_T la fonction de répartition de T.

i. Exprimer l'événement $(T \leq x)$ en fonction des événements $(Z_1 \leq x)$ et $(Z_2 \leq x)$

ii. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_T(x) = [F_Z(x)]^2$$

c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

Partie 3.

On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne A puis par la chaîne B.
Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne A est une variable aléatoire M suivant une loi exponentielle de paramètre 2.
Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne B est une variable aléatoire N suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$
Les variables M et N sont indépendantes.

1. Rappeler l'expression d'une densité de probabilité v de M et d'une densité w de N.

2. On note S la variable aléatoire représentant le temps total de fabrication d'une pièce.

Exprimer S en fonction de M et de N et déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.