EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 4 heures

PRESENTATION DU SUJET

L'épreuve de mathématiques B du concours e3a filière PSI, pour la session 2011, était constituée de trois exercices indépendants : algèbre des polynômes, géométrie et analyse.

COMMENTAIRE GENERAL DE L'EPREUVE

Si toutes les questions du sujet ont été abordées par des candidats, il apparaît sans surprise que celles relevant de la géométrie ont été les plus délaissées. Il est tout à fait regrettable que les candidats négligent cette partie des mathématiques dont l'utilité dans les sciences et techniques connexes n'est plus à prouver. A l'avenir des exercices de géométrie continueront à être posés. Plus généralement certains candidats cherchent à grappiller des points sur les questions simples et n'abordent pas celles qui sont plus délicates. D'autres essaient d'aborder les exercices dans leur globalité. Cette deuxième attitude mérite d'être encouragée. Une fois de plus, il faut déplorer qu'un certain nombre de candidats rendent des copies illisibles, mal soignées et pleines de fautes. Un correcteur ne corrige que ce qu'il arrive à lire. De plus, une copie mal soignée peut être sanctionnée. Rappelons encore que les propriétés ou termes mathématiques doivent a priori être écrits en toutes lettres. L'usage de sigles (souvent internes au cours de la classe du candidat) est à proscrire ; TGSCV, CVS, CV, CNTS... ne seront plus acceptés.

ANALYSE PAR PARTIE

Exercice 1

Le but de ce premier exercice était de déterminer les polynômes à coefficients complexes vérifiant la relation $P(X^2-1)=P(X-1)P(X+1)$. Il permettait notamment d'évaluer les candidats maîtrisant des raisonnements classiques : analyse-synthèse, par l'absurde, récurrence. Les premières questions ont été majoritairement bien traitées. Dans la plupart des copies, les récurrences étaient correctement rédigées. Rappelons que « *la suite* (u_n) *est croissante* » n'est pas une hypothèse de récurrence. De nombreux candidats ont été perturbés par le fait que les polynômes étaient à coefficients complexes. Cela a donné lieu à des arguments étonnants du type « *P n'a pas de racines réelles car P est à coefficients complexes* » ce qui laisse supposer que ni la notion de racine d'un polynôme, ni celle de nombre complexe n'est acquise. Les questions (3), (4), et (5) ont été traitées rarement ou de manière incorrecte. Le fait que pour un polynôme de n'avoir que 0 comme racine a très rarement été interprété correctement. La synthèse concernant la forme générale des polynômes P n'est presque jamais faite.

Exercice 2

Cet exercice concernait l'étude d'une courbe paramétrée classique, une *strophoïde*, et son intersection avec une droite. Le jury félicite les quelques candidats ayant traité l'exercice en entier avec soin et perspicacité. Il est cependant étonnant que l'on trouve dans de nombreuses copies :

- La parité de x ou de y justifie à elle seule la symétrie de la courbe par rapport à *(Ox),*
- Les notions de points doubles ou de points stationnaires soient inconnues,
- Les tangentes et les asymptotes soient confondues,
- Il soit répondu aux questions sans calculs, avec des tableaux sans commentaire ni conclusion,
- Le dessin soit en flagrante contradiction avec l'étude.

Le calcul du déterminant dans les questions B(1)(a) et (b) ont donné fréquemment lieu à une suite embrouillée de calculs où apparaissent miraculeusement le bon résultat à la dernière ligne. Les questions (2) et (3) de la partie B n'ont été abordées que par un candidat sur dix. Tout essai, amorce de méthode, illustration pertinente ont été pris en compte dans la notation.

Exercice 3

Cet exercice constituait en l'étude d'une fonction définie comme somme une série de fonctions en partie A. Cette fonction étant périodique, on étudiait alors dans la partie B son développement en série de Fourier. Le calcul des coefficients conduisait à celui d'une expression de la fonction initiale à partir des fonctions usuelles en partie C. Cet exercice permettait de mettre en œuvre les principaux théorèmes d'analyse au programme de deuxième année. Une bonne connaissance de ces théorèmes était nécessaire. Il a été celui qui a été le mieux traité, voir quasi parfaitement par certains candidats. Cependant une des erreurs les plus fréquentes a été la confusion entre les séries de fonctions et les suites de fonctions dans la partie A. L'énoncé était pourtant bien explicite. Que dire de ceux, nombreux, qui disent que « *$u_n(t)$ converge car équivalente à l'infini à $1/t^2$* ». A la question (3) de la partie A était demandé l'énoncé d'un théorème de dérivabilité sous le signe somme. Toutes les versions étaient acceptées locale ou globale, avec des hypothèses plus ou moins fortes. Peu de candidats ont su donner un énoncé clair donnant toutes les hypothèses y compris celles sur les fonctions u_n. Presque toutes les copies font état de la nécessité de justifier l'interversion série-intégrale dans la question (1) de la partie B. Deux possibilités s'offraient aux candidats soit utiliser la convergence uniforme soit appliquer le théorème d'interversion de type « Lebesgue ». Dans ce dernier cas, il manquait en général des hypothèses comme celle de la convergence de la série des intégrales. Par contre, les théorèmes de continuité et de dérivabilité des fonctions définies par des intégrales sont connus et généralement bien appliqués malgré des dominations parfois fantaisistes. Il eut été souhaitable que cela fût aussi le cas pour le théorème de convergence normale des séries de Fourier et aussi ceux de changement de variables dans les intégrales impropres.

ANALYSE DES RESULTATS

L'hétérogénéité de certaines copies est très étonnante. Comment expliquer qu'un candidat pour qui « *toute série dont le terme général converge vers 0 est convergente* », applique correctement avec de bonnes majorations des théorèmes sophistiqués comme celui de dérivation des fonctions définies par une intégrale impropre. Comment expliquer qu'un candidat puisse réussir l'exercice 3 en entier alors qu'il est incapable de démontrer que : pour tout a appartenant à l'ensemble des complexes, $|a+1|=|a-1|=1$ implique que $a=0$?
Il est donc nécessaire que les candidats approfondissent les notions fondamentales de base.

CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

- Une bonne connaissance du cours permet aux candidats d'obtenir un bon nombre de points. Il faut bien citer/vérifier que toutes les hypothèses soient satisfaites avant d'appliquer un résultat du cours.
- Rappelons encore une fois, que tout résultat énoncé doit être justifié avec rigueur.