EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 4 heures

PRESENTATION DU SUJET

L'épreuve de mathématiques B du concours e3a filière PSI est constituée de deux exercices indépendants, l'un d'algèbre linéaire, l'autre d'analyse, comportant chacun des parties pouvant être elles-mêmes traitées indépendamment quitte à admettre le résultat d'une question antérieure. Les questions sont très guidées, rédigés de façon très progressive et devaient permettre à tout candidat maîtrisant son cours et les techniques de calcul de base d'obtenir une note honorable. La moyenne des notes à l'épreuve est de 9,09 sur 20 avec l'écart type de 4,13.

Le jury de l’épreuve prie les candidats de l'excuser pour une malencontreuse et grossière erreur qui a échappé aux nombreuses relectures du sujet. Il rappelle néanmoins que les instructions en cas d'incohérence du sujet sont clairement décrites dans l'entête de celui-ci.

ANALYSE DU SUJET

Exercice I
Cet exercice d'algèbre linéaire propose de classifier les matrices carrées complexes de taille 2 qui « q-commutent » avec une autre matrice. Il repose principalement sur des techniques de calcul de déterminant et fait appel à la théorie de la réduction des endomorphismes. Si la partie calculatoire est plutôt bien traitée, le jury déplore les carences de nombreuses copies lorsqu'il faut faire appel au raisonnement.

La partie A, n'a d'autre but que d'introduire une formule de calcul de déterminant pour des matrices définies par blocs. Il est malheureux que des candidats inventent des formules fantaisistes de calcul pour justifier les résultats de la question 1a). Néanmoins les questions 1) et 2) sont bien traitées dans plus de 80% des copies. Par contre, moins de 10% des candidats abordent correctement la question 3. D'une part très peu d'entre eux parviennent à identifier l'ensemble S qui n'est autre que le spectre de la matrice D, encore moins à formuler un raisonnement juste faisant appel à la continuité ou à une identification de polynômes. Enfin, les termes «en toute généralité» ont manifestement été mal interprétés. Pourtant l'hypothèse de commutation entre les blocs et celle de l'inversibilité ou non de D apparaissent clairement dans les énoncés. Il appartient aux candidats de comprendre quelles sont les hypothèses desquelles découlent les résultats demandés.

Dans la partie B, on calcule le déterminant d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées complexes de taille 2. Le sujet guide les candidats au travers de calculs relativement touffus. Les questions 1) et 2) sont correctement traitées par plus de 70% des candidats. La question 3) est honorablement réussie dans près de la moitié des copies. Remarquons néanmoins que, dans la question 3), si quasiment tous les candidats utilisent la formule de la partie A, seuls moins de 15% d'entre eux pensent à s'assurer qu'il est légitime de le faire en vérifiant les hypothèses de commutation. De plus, le jury précise qu'il est inacceptable qu'une copie comporte des « escroqueries au calcul ». N'ont obtenu des points que celles où les calculs sont clairement et explicitement rédigés.

La partie se poursuit en montrant que le déterminant de l'endomorphisme s'écrit à l'aide du polynôme caractéristique de la matrice A et s'achève par la classification des matrices pour lesquelles il existe une matrice « q-commutantes ». Moins de 30% des candidats abordent les questions 4) et 5), moins de 20% d'entre eux traitent convenablement une partie de l'une ou l'autre question. Très peu d'entre eux identifient la matrice B comme un élément du noyau de l'endomorphisme. De plus l'équivalence entre $det(M_A)=0$ et les trois conditions est généralement expliquée par un raisonnement fantaisiste. Une discussion correcte sur la forme de A, à l'aide des théorèmes de diagonalisation ne se rencontre que dans 2% des copies.

Exercice II

L'exercice consistait en l'étude d'une fonction définie à l'aide de la classique moyenne arithmético-géométrique. Elle fait intervenir des suites de fonctions ainsi que des intégrales impropres.

Le jury se réjouit du fait que les théorèmes d'analyse, comme la convergence dominée ou la « règle de Leibniz » soient connus par la plupart des candidats. En revanche, il s'alarme du peu de rigueur dans la rédaction des raisonnements par récurrence. S'il est admissible que certaines formules peuvent se justifier par un « d'après une récurrence immédiate », il ne l'est pas que les questions soient systématiquement traitées de cette manière. Le jury attendait qu'au moins un raisonnement par récurrence soit complètement et correctement rédigé en particulier avec une vérification de l'initialisation. Il souligne, que les candidats qui procèdent avec cette rigueur résolvent correctement les questions A3), B2b) et D1). Le jury conseille également aux rédacteurs des sujets de s'astreindre eux aussi à cette bonne discipline.

La partie A a été bien traitée par plus de 80% de candidats.

La partie B est entachée d'une erreur d'énoncé. Pour la question B2) il fallait évidemment lire $x\leq f(x)\leq (x+1)/2$. Il va de soi que les copies (près de 40%) dans lesquelles le résultat de l'énoncé a été démontré par un passage à la limite en utilisant l'inégalité fausse $b_1(x)\leq a_n(x)\leq a_0(x)$ n'ont pas été sanctionnées. Certains candidats, remarquant l'absurdité de la double inégalité proposée, imposent la condition $x\geq 1$ ou ne démontrent que la partie vraie ou expliquent clairement l'erreur. Toutes ces copies (moins de 15%) ont été récompensées par des points hors barème.

Les deux dernières questions de la partie B où l'on utilisait la convergence uniforme sont moins bien réussies. Seules 25% des copies contiennent des éléments de réponse acceptables. Les réponses à la question 4 consistent trop souvent en une invocation de la convergence uniforme manifestement mal comprise. Le jury souligne que ce type de question de conclusion ne peut prétendre à obtenir des points que si elle est correctement rédigée, notamment, lorsque qu'on justifie que les hypothèses des théorèmes utilisés sont vérifiées.

La partie C, qui peut être abordée indépendamment des autres, consiste en l'étude d'un intégrale impropre. Comme nous l'avons évoqué plus haut, les théorèmes de convergences utiles pour les questions 1 et 2 sont bien connus d'une majorité de candidat (plus de 60%). Il reste que la vérification de certaines hypothèses manque de rigueur. Par exemple, il n'est pas admissible de lire que la fonction qui à x associe $1/(x^2)$ est intégrable sur **R**. De même nous déplorons de nombreuses erreurs dans le calcul de la dérivée ou des majorations hâtives que l'on sent forcées sans aucun souci de véracité dans le seul but de satisfaire à la liste des hypothèses.

Le changement de variable de la question 3b) qui pourtant n'avait d'autre difficulté que le calcul, est rarement effectué correctement (seulement dans 12% des copies). Nous soulignons qu'il était nécessaire de justifier la validité du changement de variable dans ce cas. Ici encore le jury a sanctionné de nombreuses tentatives « d'escroqueries au calcul ».

Enfin, **la partie D**, souffrant d'être la dernière est généralement peu entamée. En particulier, la première question qu'une récurrence simple pouvait résoudre est souvent maltraitée (seulement correctement faite dans 18% des copies). La question 2c) posant le plus de difficultés n'a été abordée que par près de 20% des copies, mais dans ce cas de manière honorable, là encore le théorème de convergence dominée est connu et relativement bien maîtrisé.

En guise de conclusion, le jury souhaite également rappeler qu'un correcteur ne peut faire preuve de mansuétude pour une copie lorsqu'il doit fournir de grands efforts pour la déchiffrer, l'écriture étant trop petite, peu lisible et lorsque sa présentation laisse à désirer.