

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 4 heures

### PRESENTATION DU SUJET

L'épreuve de mathématiques B du concours e3a filière PSI est constituée de 4 exercices indépendants. Tous ces exercices sont très guidés, rédigés de façon très progressive et devaient permettre à tout candidat maîtrisant son cours de réussir honorablement. Dans ce contexte, le jury, s'il se réjouit de la présence d'un nombre important de bonnes, voire de très bonnes copies (environ 500), déplore vivement la présence d'un nombre encore plus important de copies témoignant d'une méconnaissance totale du cours et d'un manque absolu de rigueur dans les quelques raisonnements vaguement esquissés.

### ANALYSE DU SUJET

Le premier exercice propose de calculer les puissances d'une matrice  $A$  après avoir déterminé son polynôme caractéristique.

Dans le deuxième exercice, il s'agit d'établir que la seule solution sur un segment  $[\alpha, \beta]$  d'une équation différentielle linéaire homogène, normalisée, du deuxième ordre, admettant sur  $[\alpha, \beta]$  une infinité de zéros est l'application nulle.

Le troisième exercice se divise en deux parties. Dans la première partie on établit la règle de Raabe-Duhamel qui permet de déterminer la nature de certaines séries numériques lorsque le critère de D'Alembert ne s'applique pas. Dans la deuxième partie on applique cette règle pour déterminer la nature de deux séries numériques puis pour étudier le comportement d'une série entière au bord de son intervalle ouvert de convergence.

Dans le dernier exercice, il s'agit de prouver l'existence d'un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$  transformant une famille  $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $E$  en une famille  $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $E$ , sachant que :  $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, p\}^2, \langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle$ .

### ANALYSE PAR PARTIE

#### Exercice 1

La détermination du polynôme caractéristique de  $A$  est bien réussie. L'argument essentiel à savoir le théorème de Cayley-Hamilton a été cité par une bonne moitié des candidats. On pouvait alors aisément prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur  $k$ , que toute puissance  $A^k$  de  $A$  est combinaison linéaire de  $A, A^2, A^3$  et même déterminer cette combinaison linéaire sans avoir répondu à la question 4°. La question 4° qui consistait à déterminer  $R_k(X)$  a été faite par 20% des candidats.

#### Exercice 2

A la question 1° b) la plupart des candidats justifie l'existence de  $y_n$  via le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis mais dans un nombre non négligeable de ces copies les hypothèses permettant d'appliquer ces résultats ne sont pas vérifiées.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles (cas linéaire) est invoqué par 15% des candidats pour résoudre la question 1° d).

Moins de 5% des candidats fait appel au théorème de Bolzano-Weierstrass pour résoudre la question 2°.

### Exercice 3

Partie A 65% des candidats trouve la valeur de  $\mu$  à la question 2°. La question 3° b) n'est traitée correctement que par 25% des candidats. La série  $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$  est généralement identifiée comme une série de Bertrand mais la preuve qu'elle converge n'est faite que par 5% des candidats.

Partie B 40% des candidats réussit la question 1°. Un tiers des candidats pense à effectuer une intégration par parties pour établir l'égalité demandée à la question 2° b). La très grande majorité des candidats ignore qu'il existe des théorèmes permettant de prouver la continuité en  $R$  ou en  $-\infty$  de la somme d'une série entière de rayon de convergence  $R$ . A peine 10% des candidats prouve à la question 3° c), que  $S$  est continue sur  $[-\infty, R]$  et seuls quelques candidats isolés réussissent la question 3° e). On rappelle, à ce propos, que les théorèmes vus en PSI nécessitent de justifier la convergence normale ou la convergence uniforme de la série entière sur des intervalles contenant  $R$  ou  $-\infty$ .

Exercice 4 De trop nombreux candidats ne maîtrisent pas du tout le produit scalaire : un tiers des candidats établit l'égalité de la question 1°. Les questions 3° a) et 3° b), qui sont des questions de cours, sont correctement traitées. Dans la très grande majorité des copies, dans le reste de cet exercice, les démonstrations ne sont qu'esquissées, leur déroulement manque de cohérence et trop souvent ce qui tient lieu de raisonnement n'est qu'une succession d'affirmations gratuites.