EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 3 heures

PRESENTATION DU SUJET

L'épreuve comportait trois exercices. Le premier portait sur l'algèbre linéaire euclidienne, le deuxième couvrait une large partie du programme d'analyse: intégrale dépendant d'un paramètre, fonctions de plusieurs variables, séries de fonctions; quant au troisième, il portait sur les systèmes autonomes mais reposait en fait en grande partie sur des notions fondamentales d'analyse de première année.

COMMENTAIRE GENERAL

Les trois exercices étaient grosso modo classés par ordre d'abstraction croissant. Chaque exercice commençait par des questions plutôt faciles, ce qui devait permettre aux candidats de s'approprier progressivement le sujet.

Le premier exercice était sans doute le plus classique puisqu'il traitait de la recherche des extréma du quotient de deux formes quadratiques en utilisant des outils d'algèbre linéaire et euclidienne; il se terminait par un problème d'extrémum sous contrainte. Cet exercice a été relativement bien traité par bon nombre de candidats mais a permis de révéler chez d'autres de très grandes faiblesses dans le calcul des valeurs et vecteurs propres de matrices 3X3 pourtant très simples. On a pu déplorer de nombreuses confusions entre minorant et minimum.

Le deuxième exercice était moins classique; son but était de prouver l'existence d'au plus une solution à un modèle simplifié de l'équation des ondes, avec conditions aux bords, en associant à chaque solution une fonctionnelle sous la forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre. La deuxième partie de l'exercice consistait à construire une famille de solutions en utilisant la théorie des séries de fonctions. Cet exercice n'a pas été très bien traité. Très peu de candidats ont prouvé correctement le caractère C1 d'une intégrale dépendant d'un paramètre, surtout en ce qui concerne l'hypothèse de domination. Il a surtout révélé une connaissance très superficielle de la notion de dérivée partielle. Par ailleurs, les candidats ont en général cherché à mettre en évidence la convergence normale d'une série de fonctions pour prouver la continuité de sa somme; malheureusement, pour de très nombreux candidats, les majorations en valeur absolue ont été complètement ignorées.

Le troisième exercice était consacré à l'étude d'un système autonome d'équations différentielles, dont le but était de montrer que les solutions maximales étaient définies sur tout R et se concluait par l'étude du comportement asymptotique des solutions. Bien que constitué de questions relativement simples d'analyse de première année (variations, existence de limite à une fonction monotone bornée), les candidats ont été peu attirés par le sujet et n'ont traité ici ou là que les questions les plus abordables à première vue.

ANALYSE DETAILLEE

Premier exercice

1a) Les cas d'égalité ne sont pas toujours traités de manière rigoureuse.
1b) et 1c) Beaucoup de confusions entre minorant et minimum, majorant et maximum
1d) Rien à signaler.

2a) Correctement traité dans l'ensemble.
2b) et 2c) Toujours la confusion entre majorant et maximum.
2d) Curieusement presque jamais traité: les candidats ont "oublié" de vérifier que la fonction r étudiée en 1. rentrait dans le cadre du 2.
3a) Des erreurs consternantes dans la recherche des valeurs et des vecteurs propres. Des valeurs propres (fantaisistes) qui conduisaient à (0,0,0) comme base du sous-espace associé ont laissé de marbre certains candidats.
3b) Rarement correctement justifié.
3c) Rarement traité.
3d) Des erreurs de raisonnement; la restriction d'une fonction n'a évidemment pas, a priori, les mêmes extrémums que la fonction elle même. Elle peut d'ailleurs ne présenter ni maximum ni minimum!

Deuxième exercice

1a) Si les hypothèses de continuité, d'intégrabilité, etc. ont été relativement bien traitées, la recherche d'une dominante intégrable ne l'a été que dans de très rares copies, les candidats n'ayant pas saisi l'intérêt de travailler sur un compact, domaine sur lequel la dérivée par rapport au paramètre peut être dominée par une constante, fonction évidemment intégrable sur le segment [0,1]. A cet égard, il est à déplorer que la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre dans le cas d'une intégrale sur un compact ne fasse plus l'objet d'un théorème spécifique comme c'était le cas dans les anciens programmes.
1b) Beaucoup d'escroquerie pour parvenir au résultat de l'énoncé! Le théorème de Schwarz est très rarement cité.
2a) Rien à signaler.
2b) Comme signalé dans le commentaire général, cette question a révélé une confusion autour de la notion de dérivée partielle. Pour la majorité des candidats, df/dx(0,t) ne peut être que nul car f(0,t) ne dépend pas de x!
2c) Même confusion qu'en 2b). Le lien entre la nullité de E_F et la nullité de F n'a pratiquement jamais été mis en évidence.
3a) La majorité des candidats a eu vent d'un théorème assurant la continuité en cas de convergence normale. Mais pour des raisons de majorations très peu soignées (c'est un euphémisme; pourquoi tant d'allergie aux valeurs absolues?), la convergence normale n'a été correctement établie que dans une faible proportion de copies. Notons que pour un nombre non négligeable de candidats, cette question était une "non-question", puisque qu'une somme de fonctions définies et continues est définie et continue!
3b) Très peu de candidats ont correctement utilisé le théorème de dérivabilité des séries de fonctions.
3c) Rien à signaler.

Troisième exercice

1a) Le plus souvent traité de façon maladroite; l'articulation entre l'hypothèse de bornitude de f' et l'existence de M est confuse.
1b) Le théorème de la limite monotone est le plus souvent ignoré; il semble avoir été pensé par certains candidats mais ses hypothèses ont très rarement été vérifiées (bornitude de g).
2a) Souvent traitée (mais des erreurs de calculs).
2b) Laborieux en général.
2c) Le lien avec la question 1. n'est que très rarement établi.
2d) Le problème du raccordement en beta n'a jamais été traité. La contradiction a été observée sur de très rares copies et la conclusion (beta est infini) qu'exceptionnellement. Parmi les autres réponses, citons : "c'est donc que beta est complexe"...

3a) et 3b) Souvent traitées plus ou moins correctement.
4) Quelques très rares candidats ont abordé une étude comparable à celle de la question 2.

CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Il va de soi qu'une connaissance approfondie du cours est indispensable pour aborder une épreuve de concours. Mais on conseillera surtout aux candidats de mettre ses connaissances en pratique en fournissant un travail régulier et méthodique: par la résolution d'exercices d'application directe du cours, permettant une meilleure assimilation des nouveaux concepts et théorèmes fondamentaux puis par la recherche de problèmes, nombreux et divers.
Enfin, il est recommandé aux candidats de lire intégralement l'énoncé de chaque partie d'un problème, ou de l'exercice, avant de l'aborder afin de bien s'imprégner du sujet et de repérer les éventuelles interconnexions entre les différentes questions. Dans ce sens, il est préférable, et plus profitable, de chercher à traiter l'intégralité d'une partie d'un problème que de glaner ici et là quelques points.