



CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

085

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice I

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{K}^n$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note $\text{Ker}(u)$ le noyau de u , et $\text{Im}(u)$ l'image de u .

1. Question de cours : Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2. Démontrer que $\text{Im}(u)$ est contenu dans $\text{Ker}(u)$.
3. Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.
4. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.
 - (a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u) = D$.
 - (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
 - i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
 - ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
 - (c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Démontrer que $v \circ w = 0$.
5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2 . Soient $u_1, \dots, u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2, u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose $F_1 = \text{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m , $F_i = \text{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.

- (a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m - 1$, F_i est un sous-espace vectoriel stable par u_{i+1} .
 - (b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m , F_i est de dimension au plus $\frac{n}{2^i}$.
 - (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_m = 0$.
6. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans ce paragraphe. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel :

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Pour toute matrice A , on note $\text{Ker}(A)$ le noyau de A , et $\text{Im}(A)$ l'image de A .

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note tA la matrice transposée de A .

- (a) Démontrer que $E = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}({}^tA)$.
- (b) On suppose de plus $A^2 = 0$. Démontrer que $\text{Im}(A + {}^tA) = \text{Im}(A) + \text{Im}({}^tA)$.

Exercice II

1. Questions de cours : Énoncer précisément le théorème de convergence dominée.
2. Soit n un entier naturel. On considère la fonction de la variable réelle x définie par $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$.
 - (a) Établir le tableau de variation de f_n sur l'intervalle $[0, 1]$.
 - (b) Représenter sur un même graphique les graphes des fonctions f_0, f_1 et f_2 .
3. Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on explicitera. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $[0, 1]$?

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx.$$

4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite monotone (on précisera le sens de monotonie) qui converge vers 0.
5. Démontrer que

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3} dx.$$

6. En déduire un équivalent pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. Déterminer des nombres réels α_1, α_2 et α_3 tels que :

$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5} dx.$$

8. En déduire des nombres réels α et β qu'on explicitera tels que la suite (u_n) admette un développement de la forme :

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

9. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \int_0^1 x^n g(x) dx.$$

Démontrer que pour tout entier naturel non nul k , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un développement de la forme :

$$v_n = \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots + \frac{\beta_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Exprimer les nombres β_1 et β_2 en fonction de g .

10. Soit h une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Démontrer que la suite $(n \int_0^1 x^n h(x) dx)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie et exprimer cette limite en fonction de h .

Exercice III

Soit P le plan euclidien muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On identifiera le plan euclidien P au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{C}$ la conique d'équation $x^2 - y^2 + ax + by = \frac{1}{2}$.

Soit $p = a + ib$.

1. Quelle est la nature de la conique $\mathcal{C}$?
2. Préciser les axes de la conique $\mathcal{C}$.
3. Représenter graphiquement la conique $\mathcal{C}$ pour les valeurs particulières $a = b = 1$.
4. Justifier que le point $\frac{-a + ib}{2}$ est centre de symétrie de la conique $\mathcal{C}$.
5. Expliciter (en fonction de p) des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tels que pour tout nombre complexe z , on ait l'équivalence :
$$z \in \mathcal{C} \iff \alpha_1 z^2 + \alpha_2 \bar{z}^2 + \beta_1 z + \beta_2 \bar{z} = 1.$$
6. A quelle condition le point p est-il un point de la conique $\mathcal{C}$?

Dans toute la suite de l'exercice, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Soit q le nombre complexe tel que $p + q = -1$.

On suppose $b \geq 0$ et $pq = 2$.

7. Donner un polynôme de degré 2 dont les racines sont p et q . En déduire les valeurs de a et b .
8. Démontrer que $(\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = 2$.
9. En déduire que :
 - soit $(\omega + \omega^2 + \omega^4) = p$ et $(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = q$,
 - soit $(\omega + \omega^2 + \omega^4) = q$ et $(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = p$.
10. On admet que $\cos(\frac{4\pi}{7}) \geq -\frac{1}{2}$ et que $\sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) > 0$. Démontrer que $(\omega + \omega^2 + \omega^4) = p$ et $(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = q$.
11. Démontrer que $\omega, \omega^2, \omega^4$ sont les trois racines du polynôme $X^3 - pX^2 + qX - 1$.
12. Déterminer un polynôme de degré 4 dont les racines sont $1, \omega, \omega^2, \omega^4$.
13. En déduire que $1, \omega, \omega^2, \omega^4$ sont exactement les points d'intersection de la conique $\mathcal{C}$ avec le cercle de centre 0 et de rayon 1.
14. On note σ la symétrie orthogonale d'axe $0x$ du plan euclidien P .
 - (a) Quelle est l'image du point d'affixe p ?
 - (b) Représenter sur une même figure le cercle de centre 0 et de rayon 1, $\mathcal{C}$, ainsi que $\sigma(\mathcal{C})$.
 - (c) Soit E l'intersection du cercle de centre 0 et de rayon 1 et de $\mathcal{C} \cup \sigma(\mathcal{C})$. Décrire E .

