LK57

e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I

1. On considère la fonction g de variable réelle définie par : $g(u) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(t\,u)\,dt.$
   (a) Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer, pour tout $u > 1$, un réel α_u dans $]0,1[$ tel que : $\displaystyle\int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot$
   (c) Dériver $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et intégrer par parties $\displaystyle\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(t\,u)\,dt$ pour en déduire que :
   $$\forall u > 1,\ |g(u)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{u}}\cdot$$

2. Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $]-\pi,\pi]$ est représentée dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par le demi-cercle de centre O, de rayon π et d'ordonnées positives.
   (a) Pour tout $x \in\,]-\pi,\pi]$, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
   (b) Énoncer le théorème de DIRICHLET. S'applique-t-il à la fonction f ?

3. (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de FOURIER trigonométriques de f notés a_n et b_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{2}{n}\, g(\pi\, n)$.

4. (a) Établir la convergence normale de la série de FOURIER de f. Cela contredit-il le 2°b ?
   (b) Montrer à l'aide du théorème de PARSEVAL que la série de FOURIER de f converge vers f.

Exercice II

Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \neq 0$, ainsi que l'équation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y)\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \qquad (\mathscr{E})$$

1. (a) Montrer qu'une telle fonction f vérifie l'équation $(\mathscr{E})$ si et seulement si il existe une fonction réelle a, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)\, f(x,y).$$
   (b) En déduire que les solutions de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas sont exactement les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \varphi(x)\,\psi(y)$, où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Pour une telle solution f de $(\mathscr{E})$, y-a-t-il unicité du couple (φ,ψ) ?

(c) Soient g et h deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ et telles que $g(0) = h(0)$.
Montrer qu'il existe une et une seule solution f de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R},\ f(0,y) = h(y).$$

2. Dans cette question, f désigne une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}^2$, strictement positive.
   (a) Montrer que f présente en (x_0, y_0) un maximum local si et seulement si les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x, y_0)$ présentent respectivement en x_0 et en y_0 un maximum local.
   (b) En déduire que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où f présente un maximum local est de la forme $A \times B$, où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ à préciser.

3. Soit maintenant la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = (xy)^3 + |xy|^3$.
   (a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. (On pourra écrire F comme une composée).
   (b) Démontrer que F vérifie l'équation $(\mathscr{E})$.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de fonctions φ, ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y).$$

Exercice III

Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dans lequel on note Π le plan affine d'équation $z = 0$ et Δ la droite affine passant par O et dirigé par $\vec{k}$.

On désigne par p la projection affine orthogonale sur le plan Π ; il lui correspond la projection vectorielle orthogonale π sur le plan vectoriel de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, liée à p par : $\forall (A,B) \in E^2,\ \overrightarrow{p(A)p(B)} = \pi(\overrightarrow{AB})$.

1. (a) Montrer que, pour tous points A et B, on a la relation entre distances : $p(A)p(B) \leqslant AB$.
   Préciser les cas où cette inégalité devient une égalité.
   (b) Soit D une droite affine de E, passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$.
   Déterminer avec précision la nature de l'ensemble $p(D)$?

2. Soit D une droite affine de E, non parallèle à Δ, et dont la projection orthogonale $p(D)$ sur le plan Π est notée d. On désigne alors par h le projeté orthogonal du point O sur $d = p(D)$.
   (a) Montrer l'existence d'un unique point H de D tel que $p(H) = h$.
   (b) H' désignant le projeté orthogonal de H sur Δ, montrer que :

$$\forall (M,N) \in \Delta \times D,\ HH' = Oh \leqslant MN.$$

   On a donc $HH' = \min\{MN \mid (M,N) \in \Delta \times D\} = \mathrm{d}(\Delta, D)$: c'est la distance de Δ à D.

   On rappelle d'autre part que si D est parallèle à Δ, la distance de Δ à D est l'une quelconque des distances NN', lorsque $N \in D$ et que N' désigne le projeté orthogonal de N sur Δ.

3. On note $\mathscr{C}$ le cylindre de révolution d'axe Δ et de rayon 1.
   (a) Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ et en déduire que les plans tangents à ce cylindre sont les plans d'équations $x \cos\omega + y \sin\omega = 1$, pour $\omega \in]-\pi, \pi]$.
   (b) Montrer que toute droite D telle que $\mathrm{d}(\Delta, D) = 1$ est incluse dans un plan tangent à $\mathscr{C}$.
   (c) Réciproquement, toute droite D incluse dans un plan tangent à $\mathscr{C}$ vérifie-t-elle $\mathrm{d}(\Delta, D) = 1$?

4. Soit Δ' une droite parallèle à Δ et telle que $\mathrm{d}(\Delta, \Delta') = 1$, coupant le plan Π en un point O'.
   (a) Soient, dans le plan Π, les cercles Γ et Γ' de rayon 1 et de centres respectifs O et O'.
   Déterminer dans ce plan les tangentes communes à Γ et Γ'.
   (On pourra au besoin considérer le plan Π comme orienté par la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.)
   (b) Décrire précisément l'ensemble des droites affines D de E telles que $\mathrm{d}(\Delta, D) = \mathrm{d}(\Delta', D) = 1$.