C54B

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

**Epreuve de Mathématiques B MP**

**durée 3 heures**

---

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé**

## Exercice 1

On considère l'équation différentielle :

$$y' + 2xy = 1 \qquad (E)$$

On considère la fonction $g$ de la variable réelle $x$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

1. Montrer que $g$ est impaire.
2. Montrer que $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.
3. En déduire en fonction de $g$ toutes les solutions de l'équation différentielle $(E)$.
4. Soit $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ une solution développable en série entière de l'équation différentielle $(E)$.

(a) Montrer que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation :

$$\forall i \geq 0, \quad (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0.$$

(b) Déterminer $a_1$. Expliciter les coefficients $a_{2i+1}$ pour $i \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée par la valeur de $a_0$, et exprimer les coefficients $a_{2i}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, en fonction de $a_0$.

(d) Réciproquement, on considère une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall i \geq 0, \quad (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0.$$

Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

(e) Expliciter le développement en série entière de $g$.

5. On considère les fonctions $g_1$ et $g_2$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; g_1(x) = e^{-x^2} \;\text{ et }\; g_2(x) = \int_0^x e^{t^2}dt.$$

(a) Expliciter le développement en série entière des fonctions $g_1$ et $g_2$.

(b) En déduire le le développement en série entière de la fonction $g_1g_2$ à l'aide d'un résultat dont on rappellera l'énoncé. En déduire la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2j+1} C_k^j = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

---

## Exercice 2

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On le munit du produit scalaire euclidien canonique $< , >$ et de la norme euclidienne associée $\| \;\|$, c'est à dire : pour tout $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$< v, w >= v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 \;\text{ et }\; \|v\| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

On remarquera que $< v, w >= (v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

On note $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $(3,3)$ à coefficients réels, et $I$ la matrice identité de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives est dite **définie positive**.
Pour $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{E}(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$\mathcal{E}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ||Ax|| = 1\}.$$

1. Soit $P$ dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $P$ est une matrice orthogonale. Déterminer $\mathcal{E}(P)$.

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels tous non nuls. Soit $D$ la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $\mathcal{E}(D)$ est un ellipsoïde.

3 Soit $A$ dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose $A$ **inversible**.

   (i) Justifier que ${}^tAA$ est une matrice symétrique définie positive.

   (ii) En déduire qu'il existe une matrice diagonale $D$, avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et une matrice orthogonale $P$ telles que

$${}^tAA = {}^tPD^2P.$$

   (iii) On pose $S = {}^tPDP$. Démontrer que $S$ est une matrice symétrique définie positive.

   (iv) Montrer alors qu'il existe une matrice orthogonale $Q$ telle que $A = QS$.

   (v) En déduire que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$.

   (vi) Démontrer que $\mathcal{E}(A)$ est un ellipsoïde.

4 Soient $S$ et $S'$ dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $S$ et $S'$ sont des matrices **symétriques définies positives** et que $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$.

   (i) Soit $v$ un vecteur non nul. En considérant le vecteur $v/\|S(v)\|$, démontrer que $\|S(v)\| = \|S'(v)\|$.

   (ii) En déduire que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall w \in \mathbb{R}^3, \quad < S(v), S(w) > = < S'(v), S'(w) > .$$

   On pourra commencer par exprimer le produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ en fonction des normes des vecteurs $x + y$ et $x - y$.

   (iii) En déduire que $S^2 = S'^2$.

   (iv) Soit $\alpha$ une valeur propre de $S$. A l'aide d'un théorème dont on rappellera l'énoncé, montrer que $\ker(S - \alpha I) \oplus \ker(S + \alpha I) = \ker(S^2 - \alpha^2 I)$. En déduire que $\ker(S - \alpha I) = \ker(S^2 - \alpha^2 I)$.

(v) Démontrer que $S = S'$.

5 Soient $A$ et $A'$ dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, supposées **inversibles**. Montrer que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$ si et seulement si il existe une matrice orthogonale $V$ telle que $A = VA'$.

---

## Exercice 3

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de centre $O$ paramétrée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 5\cos t \\ y(t) & = & 3\sin t \end{array}\right. , t \in [-\pi, \pi].$$

1. Soit $t \in [-\pi, \pi]$. On note $M(t)$ le point de $\mathcal{E}$ de paramètre $t$.

   (i) Montrer que l'équation de la tangente $T_t$ à $\mathcal{E}$ au point $M(t)$ est :

   $$3(\cos t)x + 5(\sin t)y = 15.$$

   (ii) Montrer qu'il existe un unique point $P$ sur la tangente $T_t$ tel que les droites $T_t$ et $OP$ sont orthogonales.

   (iii) Quel est le point $P$ lorsque le point $M(t)$ est un sommet de l'ellipse $\mathcal{E}$ ?

   (iv) Démontrer que les coordonnées du point $P$ sont :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} X(t) & = & \dfrac{45\cos t}{9 + 16(\sin t)^2} \\ Y(t) & = & \dfrac{75\sin t}{9 + 16(\sin t)^2} \end{array}\right. .$$

On remarque dans la question 1(iv) que les coordonnées du point $P$ dépendent de $t$. On note ce point $P_t$.

2. On se propose dans cette question d'étudier le lieu des points $P_t$, lorsque $t$ parcourt l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On admet que les dérivées respectives des fonctions $X$ et $Y$ sont :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} X'(t) & = & \dfrac{-45\sin t\,(25 + 16(\cos t)^2)}{(\,9 + 16(\sin t)^2\,)^2} \\ Y'(t) & = & \dfrac{75\cos t\,(9 - 16(\sin t)^2)}{(\,9 + 16(\sin t)^2\,)^2} \end{array}\right. .$$

(i) Etablir le tableau de variations de la fonction $t \mapsto X(t)$, lorsque $t$ parcourt l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(ii) Démontrer qu'il existe un unique $\alpha$ dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $Y'(\alpha) = 0$ et comparer $\alpha$ à $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$ . Calculer $X(\alpha)$ et $Y(\alpha)$.

(iii) Etablir le tableau de variations de la fonction $t \mapsto Y(t)$, lorsque $t$ parcourt l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On note $\mathcal{F}$ le lieu des points $P_t$ définis dans la question **1**, pour $t \in [-\pi, \pi]$.

3. Représenter les courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sur un même graphique.

4. Soit $\tau$ la translation de vecteur $10\vec{\imath}$. On considère l'ellipse $\mathcal{E}' = \tau(\mathcal{E})$. On fait rouler sans glisser l'ellipse $\mathcal{E}'$ sur l'ellipse $\mathcal{E}$ dans le sens trigonométrique. Quel est le lieu du centre de $\mathcal{E}'$ ?