KR36

J. 5047

e4a concours

Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A

durée 3 heures

L'usage de calculatrices est interdit

Partie 1.

Question 1.

On appelle θ la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, paire et périodique de période 2π, définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \theta(x) = \frac{\pi^2}{4} - x^2 \\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \ \theta(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

1.1. Tracer les graphes des fonctions θ et θ_1, dérivée de la fonction θ.

1.2. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction θ_1.
Etudier sa convergence.

Question 2.

En déduire la série de Fourier associée à la fonction θ et celle de Φ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \ \Phi(x) = \int_0^x \theta(u)\,du.$$

Etudier la convergence de ces séries.

Tournez la page S.V.P.

La suite du problème consiste à rechercher les fonctions U de classe C^0 sur $\Omega = [0,\pi] \times \mathbf{R}_+$ et C^2 sur $[0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$(P) \quad \begin{cases} \forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*, \ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) & (1) \\ \forall t \in \mathbf{R}_+, \ U(0,t) = U(\pi,t) = 0 & (2) \\ \forall x \in [0,\pi], \ \lim\limits_{t \to +\infty} U(x,t) = 0 & (3) \\ \forall x \in [0,\pi], \ U(x,0) = \Phi(x) & (4) \end{cases}$$

Une fonction U vérifiant les quatre relations $(1), (2), (3)$ et (4) est dite solution du problème (P).

Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Partie 2.

On se propose de chercher des solutions de l'équation différentielle (1) sous la forme de fonctions V définies sur Ω par :

$$\forall (x,t) \in \Omega, \ V(x,t) = g(x).h(t)$$

où g est une fonction réelle de classe C^2 sur $[0,\pi]$ et h une fonction réelle de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+$.

Question 1.

1.1. Montrer que si les fonctions g et h sont solutions des équations différentielles :

$$\begin{cases} g''(x) - \mu g(x) = 0 \\ h'(t) - \mu h(t) = 0 \end{cases}$$

où μ est un réel quelconque, alors la fonction $V : (x,t) \to V(x,t) = g(x).h(t)$ vérifie (1).

1.2. Trouver toutes les solutions des équations différentielles précédentes.

1.3. On prend $\mu = -k^2$, $k \in \mathbf{N}^*$. Déterminer une suite de fonctions $(V_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$:

$$\begin{aligned} V_k : \ & \Omega \to \mathbf{R} \\ & (x,t) \mapsto V_k(x,t) = g_k(x).h_k(t) \end{aligned}$$

vérifiant (1), (2) et (3).

Question 2.

Soit : $H : \Omega \to \mathbf{R}$

$$(x,t) \mapsto H(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sin(kx) e^{-k^2 t}$$

et pour $k \in \mathbf{N}^*$, $R_k : \Omega \to \mathbf{R}$

$$(x,t) \mapsto R_k(x,t) = \sin(kx) e^{-k^2 t}.$$

Il s'agit de déterminer les coefficients $(d_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ pour que la fonction H soit solution du problème (P).

2.1. A l'aide de la relation (4), déterminer les coefficients $(d_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$.

2.2. Montrer qu'alors, la fonction H est deux fois dérivable par rapport à x et une fois par rapport à t avec :

$$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*, \ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2}(x,t)$$

et $$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*, \ \frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial t}(x,t).$$

Question 3.

Trouver une solution au problème (P).

Partie 3.

Question 1.

$$\text{On note } E = \left\{ \begin{array}{c} \omega,\ C^0 \text{ sur } \Omega \text{ et } C^2 \text{ sur } [0,\pi] \times \mathbf{R}_+^*, \text{ telle que } \omega \text{ vérifie } (1),(2),(3) \text{ et} \\ \forall x \in [0,\pi], \ \ \omega(x,0) = 0 \end{array} \right\}.$$

1.1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

1.2. Prouver que si u et v sont solutions du problème (P), alors $u - v \in E$.

Question 2.

Soit $\omega \in E$.

2.1. Calculer, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'intégrale : $\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x}\left[\omega(x,t) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t) \right] dx.$

Tournez la page S.V.P.

2.2. En déduire que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\quad \int_0^\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\partial(\omega^2)}{\partial t}(x,t)\,dx = 0.$

2.3. On note $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$T \to \psi(T) = \int_0^T\left(\int_0^\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx\right)dt + \int_0^T\left(\int_0^\pi \left(\omega(x,t)\,\frac{\partial \omega}{\partial t}(x,t)\right)dx\right)dt.$$

Montrer que ψ est nulle sur $\mathbf{R}_+$. $\big($ On pourra, pour $T \in \mathbf{R}_+$, calculer $\psi'(T)\big)$.

En déduire que $\forall\ T \in \mathbf{R}_+,\ \int_0^\pi \omega^2(x,T)\,dx = 0.$

2.4. Démontrer que E ne contient que la fonction nulle.

2.5. Combien le problème (P) possède-t-il de solutions ?
