EPREUVE DE MATHEMATIQUES A

Durée : 4 heures

PRESENTATION DU SUJET

Le sujet était conforme aux programmes des classes PCSI-PC adapté à une épreuve de 4 heures et au niveau des candidats. Il ne comportait pas de difficultés majeures, néanmoins certaines questions permettaient de mettre en avant la capacité à appliquer des techniques non « triviales » apprises en prépa.

Le sujet était très progressif, quelques questions de niveau Terminale scientifique (études de fonctions, équation de tangente), une première partie sans la question 5) dédiée au programme de 1ère année (équations différentielles linéaires du 1er ordre avec un problème de raccord, développements limités et applications, études de fonctions avec variations, limites, branches infinies, fonctions hyperboliques) et enfin la question 5) de la partie A) et la partie B) consacrées au programme de seconde année (intégrales impropres, théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, séries numériques, séries de Fourier, séries entières, développement en séries entières).

Signalons également que les résultats étaient souvent donnés par l'énoncé pour permettre aux candidats qui n'aboutissaient pas à une question de poursuivre le problème, signalons à ce propos qu'évidemment la plupart des candidats aboutissent au résultat donné même si parfois ils font preuve d'une réelle mauvaise foi ce qui plutôt que de les servir les handicape pour la suite. Notons que ce genre de comportement est plutôt en recul par rapport aux années antérieures.

Rappelons à toutes fins utiles que le programme du concours porte sur les deux années de prépa, mais les connaissances sur le programme de Sup sont souvent non acquises ou non revues.
Un exemple très frappant : moins d'un candidat sur cinq a été capable de donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.Ce qui ne présentait pas une réelle difficulté ! En outre, très peu de candidats connaissent le lien entre développement limité et régularité de fonctions et ne savent pas utiliser un développement limité pour calculer correctement une limite ou faire une étude locale de fonction !
Signalons également dans le même registre : les équivalents, les inégalités.

Le barème de l'épreuve était très généreux sur les points suivants :
Les questions de cours (au nombre de 4) : Entre 10 et 15 % du barème final de l'épreuve ! On ne peut encore une fois que rappeler l'importance en mathématiques de connaître avec **précision** les définitions, les théorèmes et propositions (en particulier leurs hypothèses).
Le tracé des courbes : il faut donc rappeler aux candidats de ne pas négliger ces questions.

Le sujet étant classique et sans réelles difficultés, le niveau des copies était dans l'ensemble convenable, signalons quelques copies remarquables et en parallèle quelques copies très faibles. Même les candidats les plus faibles essaient de donner le meilleur d'eux même avant de constater sans doute que s'ils avaient appris leur cours, ils en auraient fait bien plus !
L'objectif qui était d'utiliser toute l'échelle de notes pour bien classer les candidats est dans l'ensemble atteint. En effet, ce sujet a permis aux élèves sérieux et travailleurs de se

démarquer et vu la longueur des copies la plupart des candidats sérieux ont travaillé pendant quatre heures ce qui a permis un bon classement.
La plupart des candidats ont traité l'ensemble du problème ou en tout cas ont eu le temps d'aborder la plupart des questions.

La majorité des candidats ont fait un réel effort de présentation (très peu de copies illisibles ou brouillons) et de rédaction ce qu'il faut évidemment encourager. Il est à regretter toutefois que de nombreuses copies manquent parfois de justifications claires et rigoureuses (surtout sur les développements limités, l'intégration et les séries !).

Questions de cours :
Les théorèmes et définitions (Fourier, intégration terme à terme, comparaison série-intégrale, fonction développable en série entière) ne sont pas connus de manière assez précise : il y a peu de candidats qui ne les connaissent pas du tout, il y en a un peu plus qui les connaissent vraiment bien et pour tous les autres (la grande majorité) il y a presque toujours un petit détail, souvent plus, qui est faux ou manquant !
Lors de l'énoncé des théorèmes, les candidats utilisent un nombre impressionnant de notations et d'abréviations (en particulier sur les séries de Fourier) sans aucune indication sur leur signification : Les correcteurs ont eu le droit à un véritable Tour de France des notations employées par les différents enseignants (presque autant de notations que d'enseignants !) On ne se permet pas ce genre de « raccourcis » un jour de concours d'autant que certaines notations sont très obscures et les candidats perdent alors des points sur les questions de cours. On ne peut que redire aux candidats : « Faites des phrases pour mémoriser comme pour rédiger! »

Signalons également que le nombre de copies totalement hors sujet est très faible, les candidats qui parfois se mettent à raconter un peu « n'importe quoi », en tout cas très loin de ce qui est attendu (une pensée pour le temps passé en cours de maths depuis des années en regard de l'effet produit), se rattrapent sur d'autres questions. Il y a du progrès par rapport aux sessions antérieures. Peut-être est-ce liée à la véritable faisabilité par un élève moyen de l'épreuve : cela a du rappeler à tous ce dont ils ont entendu parler pendant l'année, ils se sont donc senti un peu plus concernés par les questions posées, très proche du cours et des TD.
Pour finir une disparité assez nette entre les centres d'examen avec en général un niveau sensiblement meilleur pour les centres les plus importants.

CONSEILS AUX CANDIDATS
Pour qu'elle soit efficace, il faut organiser sa préparation et en particulier ses révisions. Plus un domaine est technique, plus il doit être révisé peu de temps avant le concours : Par exemple, les développements limités doivent être repris proche du concours alors qu'un résultat comme la CNS de diagonalisabilité s'il a été compris reste en mémoire donc peut être révisé à une échéance moins proche.

Il faut se laisser quelques minutes de relecture et faire preuve **<u>d'esprit critique</u>**.
Voici quelques exemples d'erreurs assez fréquentes qu'une relecture aurait du corriger.
- Exiger qu'une fonction soit à la fois continue par morceaux et de classe C^1 par morceaux devrait sembler bizarre à tout candidat qui se relit
- Enoncer deux théorèmes de convergence avec les mêmes hypothèses (les plus faibles !) pour obtenir à la fois une convergence simple et une convergence normale.
- Que de limites qui dépendent de la variable !
- Des équations de tangentes bien étranges !

COMMENTAIRE SUR CHAQUE PARTIE DE L'EPREUVE

Partie A

1) a) Question dans l'ensemble plutôt bien traitée.
Le théorème sur la résolution des équations différentielles linéaires (EDL) d'ordre 1 homogènes et la méthode de variation de la constante sont, souvent, connus.
Des oublis fréquents de la valeur absolue dans $\ln|e^x-1|$.
Parfois les candidats ne distinguent pas les constantes d'intégration sur les 2 intervalles de résolution.
Quelques méthodes de résolution en y'/y sans aucune justification. (très peu de copies cependant)

b) Question rarement bien traitée.
Dans la plupart des cas seul le raccordement par continuité est abordé alors que l'énoncé qui anticipait la confusion rappelait la nécessité de la dérivabilité en 0.
Confusion fréquente entre continuité et prolongement par continuité, f dérivable en 0 et f ' continue en 0.
Rares sont les candidats qui exploitent ou qui vérifient l'EDL au point 0.

2) C'est la question la plus mal traitée du problème : les étudiants manipulent des objets qu'ils ne comprennent pas ! C'est une grosse surprise !
a) Une méconnaissance profonde des opérations sur les développements limités (DL), des compositions de DL à l'ordre 1 et 2 avec un résultat à l'ordre 2.
Dans un très grand nombre de cas la partie régulière du DL n'est même pas un polynôme !
Quelques erreurs de calculs.

b) Le lien entre DL et régularité de fonction n'est pratiquement jamais connu.
La formule de Taylor Young à l'ordre 2 est appliquée en ignorant l'hypothèse de classe C^2 au voisinage de 0 qui à ce stade du problème n'était pas acquise.
De nombreux candidats affirment la continuité en 0 sans examiner le terme constant : certains obtiennent un DL faux avec un terme constant égal à 0 et affirment que f est continue en 0.

c) De nombreuses confusions entre dérivable, continue et de classe C^1.
De très nombreux candidats, utilisent un résultat faux du b) f est deux fois dérivable en 0 ce qui permet d'éluder tout calcul (le raisonnement est correct mais basé sur un résultat faux).
Quelques candidats oublient de préciser que f est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ par les théorèmes opératoires sur les fonctions de classe C^1.

d) Un certains nombre d'équations de droites très farfelues. (c'est inquiétant à ce niveau !)
∗ Très peu de candidats pensent à utiliser le DL (même faux) qu'ils ont obtenu pour obtenir une équation de la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

3) Question sans difficulté, mais qui met en évidence la légèreté avec laquelle les candidats abordent les questions sans vraiment réfléchir et surtout sans chercher à argumenter: on observe, on devine, on affirme, souvent sans preuve mais avec des commentaires. Signalons que quelques candidats (très minoritaires) semblent ne même pas avoir le niveau exigé en terminale ES !

a) Quelques erreurs de limites en $-\infty$ avec des incohérences dans le tableau de variations !

b) Oubli de l'étude faite en 0 (présence de double barre en 0).
Certains candidats affirment que f est décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,=\infty[$ au lieu de $\mathbb{R}$ voir pour certains sur $\mathbb{R}^*$.

c) La limite en $+\infty$ et l'asymptote horizontale est presque toujours bien faite.
La branche infinie en $-\infty$ est très rarement bien traitée : Confusion entre direction asymptotique et asymptote : Les candidats affirment f(x) équivalent à –x en $-\infty$ donc y=-x est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$, ce raisonnement est faux il faut impérativement vérifier que f(x)+x tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.
Certains affirment la présence d'une asymptote verticale en $-\infty$!

d) Lorsque la courbe est tracée, elle est en règle général très soignée et cohérente avec l'étude faite.

4) La question (sauf b)iii)) est dans l'ensemble très bien traitée !

a) Question sans difficulté et traitée correctement par quasiment tous les candidats, signalons tout de même que les calculs avec les fonctions hyperboliques sont fait sans efficacité (pour certains une page de calculs pour aboutir !).

b)i) Question sans difficulté et assez bien traitée, quelques candidats oublient le cas x=0.

b)ii) Rares sont les candidats qui précisent que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et qui signalent f(-x)=f(x) pour tout x réel en particulier x=0.

b)iii) Question difficile qu'aucun candidat n'a réussi à traiter convenablement.

5) Une proportion non négligeable (de l'ordre de 1 sur 10) est totalement hors sujet sur l'intégration, pour beaucoup d'autres il y a de grosses confusions et des justifications rarement claires et rigoureuses. Mais près d'un candidat sur 2 (heureusement) répond dans l'ensemble correctement à une partie de cette question. Les calculs sont en général faits avec très peu d'efficacité.

a) Trop de candidats ne s'intéressent qu'aux bornes de l'intégrale sans signaler que f est continue sur $[0,+\infty[$ donc pas de problème en 0 ni ailleurs sur $[0,+\infty[$!
Les candidats utilisent très souvent un théorème de comparaison sans préciser que f est positive sur $[0,+\infty[$.
Le vocabulaire employé est parfois incorrect : « f intégrable en 0 » ou « f intégrable en $+\infty$ ».

b) Question dans l'ensemble rarement bien traitée dans son ensemble.
Les remarques du a) s'appliquent également à cette question pour l'existence.
Peu de candidats justifient leur changement de variables dans les intégrales impropres.
De très nombreux candidats font preuve d'une mauvaise foi manifeste pour montrer que I=J.
Peu de candidats ont trouvé le bon changement de variable (bien souvent ils se contentent de $u=e^x$).

c) Peu de candidats justifient l'existence de I_k.
De très nombreuses intégrations par parties dans les intégrales impropres alors qu'il n'y a aucun théorème qui le permette.

d) Voir remarques précédentes sur les questions de cours.
e) Rares sont les candidats qui justifient soigneusement les hypothèses du théorème précédent.

Partie B

1) a) Plusieurs candidats ne représentent g_a que sur $]\pi,\pi]$.
Des représentations parfois fantaisistes de la fonction ch.
Parfois des asymptotes verticales en les $k\pi$ (k entier).

b) Si dans leur intégration par parties, les candidats intègrent le cosinus alors ils oublient presque systématiquement le cas n=0.

Quelques méthodes complexes que les candidats ont du mal à mener jusqu'au bout.
c) Oubli parfois du coefficient 2 dans a_n.

d) Voir remarques précédentes sur les questions de cours.
Certains candidats confondent les 2 théorèmes ou mettent les mêmes hypothèses dans les 2 cas !
Quelques candidats affirment la convergence de f vers sa série de Fourier !

e) Question très classique mais qui a été rarement bien traitée.
Plusieurs candidats écrivent pour tout t réel : $g_a(t)=ch(at)$.

2) a) Quelques candidats ignorent la signification de la convergence normale.
Plusieurs candidats majorent $\left|\dfrac{1}{t^2+n^2\pi^2}\right|$ par $\dfrac{1}{t^2}$ et affirment que $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}$ converge ! Cela prouve qu'ils manipulent des expressions qu'ils ne comprennent pas.
De nombreux équivalents farfelus (le plus fréquent $\dfrac{1}{n^2\pi^2}$ équivaut à $\dfrac{1}{n^2}$) ce qui prouve que les candidats ont beaucoup de mal dans l'ensemble avec la notion d'équivalent, peut-être cette notion n'est elle pas suffisamment approfondie en classe ?

b) Le théorème de comparaison séries-intégrales est très rarement connu !
Très peu de candidats re-démontrent l'existence de $\zeta(p)$.
Que de mauvaise fois pour montrer que $1\leq\zeta(p)$: on affirme souvent : $1\leq\dfrac{1}{p-1}$.

c) Question fort mal traitée.
Rappelons aux candidats qu'il n'y a aucun théorème de D'Alembert dans le programme pour les séries entières !

d) Les inversions de sommes ne sont pratiquement jamais justifiées.
Que de manipulations d'inégalités et de valeurs absolues farfelues (multiplication par $(-1)^n$, oubli de l'inégalité triangulaire…).

e) Question assez bien traitée par les candidats qui l'abordent.
Quelques limites quand N tend vers $+\infty$ qui dépendent de N.
Quelques rédactions bien fantaisistes.

3) a) Voir remarques précédentes sur les questions de cours.
La définition d'une fonction développable en série entière est très rarement connue !

b) Oubli très fréquent du cas x=0.

c) Question assez bien traitée dans l'ensemble par les candidats qui l'abordent.
Il y a parfois un manque d'honnêteté.
Oubli du cas x=0.

d) Question fort mal traitée
De très nombreux candidats affirment qu'une fonction développable en série entière en 0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$!
Très rares sont les candidats qui expriment correctement les $f^{(k)}(0)$.

e) Question peu traitée et rarement correctement.