e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

# Épreuve de Mathématiques A PC

**durée 4 heures**

***Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.***

---

## L'usage de la calculatrice est interdit

## Problème.

* Les deux parties de ce problème et les questions dans chaque partie sont très largement indépendantes les unes des autres. Dans les rares cas où un résultat précédent est utile pour traiter une question alors l'énoncé précise clairement le numéro de la question où se trouve le résultat.

* Dans différentes questions du problème, le candidat est invité à énoncer avec soin un théorème de cours.

Dans tout le problème, on désigne par :

- f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x=0 \end{cases}$
- t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}-\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé du plan.

### Partie A : Etude de la fonction f.

1) Solution d'une équation différentielle :

On considère l'équation différentielle (E) dont la fonction inconnue est y, de la variable x : (E) $(e^x-1)\,y' + e^x\,y = 1$.

a) Après avoir déterminé les intervalles de résolution de (E), résoudre (E) sur chacun de ces intervalles.
b) Montrer que (E) possède une unique solution (dérivable) sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2) Etude de f en 0 :

a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction : $x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$.

b) Peut-on déduire du développement limité du a), sans nouveaux calculs, que : (justifier avec soin)

* f est continue en 0 ?
* f est dérivable en 0 et la valeur de f '(0) ?
* f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de f "(0) ?

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Donner une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 et préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à T au voisinage de 0.

3) Variations de f :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=xe^x-e^x+1$.

a) Dresser le tableau de variations complet de g et donner le signe de g.

b) Donner les variations de f.

c) Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies de $(\mathcal{C})$ : montrer en particulier que $(\mathcal{C})$ possède 2 asymptotes et préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à ses asymptotes.

d) Donner l'allure de $(\mathcal{C})$ (faire apparaître les asymptotes et T).

4) Expression hyperbolique de f :

a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)}-1\right)$.

b) Soit la fonction $f_1$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x)=f(x)-1+\dfrac{x}{2}$.

i) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ : $f_1(x)=\dfrac{x}{2}t\left(\dfrac{x}{2}\right)$.(la fonction t est définie en préliminaire)

ii) Montrer que $f_1$ est une fonction paire.

iii) Quelle propriété géométrique peut on en déduire pour $(\mathcal{C})$ ?

5) Intégrale impropre associée à f :

a) Montrer que $I=\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe.

b) Justifier l'existence de $J=\int_0^1 \dfrac{\ln(u)}{u-1}du$ et montrer que J=I.

c) On pose $I_k=-\int_0^1 u^k \ln(u)du$ pour $k\in\mathbb{N}$, calculer $I_k$.

d) Enoncer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle I quelconque.

e) En déduire que $I=\sum_{k=0}^{+\infty} I_k$, puis que $I=\zeta(2)$ où $\zeta(2)=\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$.

## Partie B : Développement en série entière de f :

1) Un développement en série de Fourier :

On considère $a\in\mathbb{R}^*$ et la fonction $g_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

* $g_a$ est $2\pi$ périodique.
* Si $t\in]-\pi,\pi]$, $g_a(t)=\mathrm{ch}(at)$.

a) Donner l'allure du graphe de $g_a$, $g_a$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

b) Si $n\in\mathbb{N}$, montrer, par exemple en utilisant une double intégration par parties, que $\int_0^{\pi}\mathrm{ch}(at)\cos(nt)dt=(-1)^n\dfrac{a\,\mathrm{sh}(a\pi)}{a^2+n^2}$.

c) Calculer pour $n\in\mathbb{N}$, les coefficients réels $a_n$ et $b_n$ de la série de Fourier associée à $g_a$.

d) Enoncer les théorèmes de convergence simple et normale pour les séries de Fourier. La série de Fourier de $g_a$ converge-t-elle simplement vers $g_a$ sur $\mathbb{R}$ ? converge-t-elle normalement vers $g_a$ sur $\mathbb{R}$ ?

e) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $2x\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2\pi^2}=t(x)$. (on pourra poser $x=a\pi$).

2) Etude d'une série entière :

On considère :

* la série numérique $\zeta(p)=\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^p}$ pour $p\in\mathbb{N}$ avec $p\geq 2$.
* la série entière, $h(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{2k}t^{2k}$ où $\alpha_{2k}=\dfrac{(-1)^k\zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2}}$ et si $N\in\mathbb{N}$, on note $S_N(t)$

  la somme partielle suivante : $S_N(t)=\sum_{k=0}^{N}\alpha_{2k}t^{2k}$.
* la série de fonctions définie pour $t\in\mathbb{R}$ par $m(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{t^2+n^2\pi^2}$.

a) Montrer que la série de fonctions définissant m converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Enoncer le théorème de comparaison série-intégrale, en déduire l'existence de $\zeta(p)$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ avec $p\geq 2$ et pour $n,p\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\right)-1\leq\int_1^n\frac{dt}{t^p}\leq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p}$$

En déduire que $1\leq\zeta(p)\leq 1+\dfrac{1}{p-1}$ et donner la limite de $\zeta(p)$ pour $p\to+\infty$.

c) Montrer que pour tout $t\in]-\pi,\pi[$, la série entière $h(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{2k}t^{2k}$ converge.

d) En intervertissant soigneusement deux sommes, montrer pour $N\in\mathbb{N}$ :

$$\forall t\in]-\pi,\pi[,\ S_N(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^N\left(\dfrac{t}{n\pi}\right)^{2N+2}}{t^2+n^2\pi^2}.$$

En déduire que : $\forall N \in \mathbb{N}, \forall t \in ]-\pi,\pi[$ : $|S_N(t)-m(t)| \leq \left(\dfrac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1} m(t)$.

e) En déduire que les fonctions m et h sont égales sur $]-\pi,\pi[$.

3) Développement en série entière de f :

a) Rappeler la définition d'une fonction développable en série entière en 0.
b) En utilisant B)1)e) et B)2)e) montrer que la fonction t est développable en série entière en 0.
c) En déduire en utilisant la question A)4)b)i) que la fonction f est développable en série entière en 0 et que son développement en série entière est :
$\forall x \in ]-2\pi,2\pi[$ : $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n x^{2n}$ où $\beta_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\zeta(2n)}{\pi^{2n}2^{2n-1}}$.
d) Montrer que la fonction f est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et préciser si $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0)$.
e) Application : Déduire de la question A)2)a) la valeur de $\zeta(2)$ et de la question A)5)e) la valeur de $\int_0^{+\infty} \dfrac{t}{e^t-1} dt$.

*Remarque : On peut obtenir ainsi en poursuivant le développement limité de f, les valeurs de $\zeta(2n)$.*

* * *