EPREUVE DE MATHEMATIQUES A

Durée : 4 heures

PRESENTATION DU SUJET

L'objet du problème était d'appliquer les techniques de l'algèbre linéaire à des calculs de développements limités, puis d'étendre les résultats obtenus à des développements en série entière.

COMMENTAIRE GENERAL DE L'EPREUVE

Il s'agissait tout d'abord de tester l'aptitude des candidats à appliquer leur connaissance du calcul matriciel à des situations familières en analyse. On voulait ensuite évaluer l'acquisition de plusieurs méthodes fondamentales en analyse, comme les développements limités et les développements en série entière. Dans les deux dernières parties, quelques questions plus ardues, sur la convergence d'une série entière et sur la géométrie du plan complexe, devaient permettre enfin aux meilleurs candidats de se mettre en valeur.

ANALYSE PAR PARTIE

La première partie était consacrée à l'endomorphisme φ_n qui à un polynôme P(X) de degré au plus n associe le polynôme $P(X+X^2)$ tronqué au degré n : on déterminait sa matrice M_n relativement à la base canonique puis la matrice inverse de M_n, après avoir montré que φ_n est un automorphisme. Les questions les plus cruciales étaient précédées par l'étude du cas particulier n = 4 pour permettre à chacun de contrôler les réponses qu'il obtenait dans le cas général, ou à défaut de les conjecturer.

Dans la deuxième partie, on appliquait tout d'abord ces résultats au calcul du développement limité d'ordre n de $f(x+x^2)$ en 0 lorsque $f(x)$ admet un tel développement. En supposant $f(x)$ somme d'une série entière, on obtenait ensuite sur un intervalle ouvert contenant 0 un développement en série entière de $f(x+x^2)$ dont l'expression prolongeait les développements limités précédents.
On s'intéressait enfin dans la troisième partie à la réciproque, sur des intervalles adaptés, de la fonction $a : x \mapsto x + x^2$ et on lui cherchait un développement en série entière. On prolongeait alors cette fonction a en un C^1-difféomorphisme α entre deux ouverts du plan complexe et on vérifiait la persistance pour α^{-1}, dans le domaine complexe, du développement obtenu pour a^{-1}.
À chaque question de calcul des parties II et III on demandait, après avoir appliqué les résultats précédents, de retrouver ses réponses par les techniques usuelles du développement limité et du développement en série entière.

ANALYSE DES RESULTATS

On a constaté tout d'abord qu'un nombre non négligeable de candidats ne maîtrisait pas des notions incontournables en mathématiques comme la composition des applications, calculant $(T_n(P))^2$ au lieu de $(T_n \circ T_n)(P)$ au I 1°a, l'ensemble-image d'une application, répondant $T_n(P)$ pour l'image du projecteur T_n au I 1°b, ou la notion d'application surjective, parfois

définie par l'existence d'au plus une image pour tout élément. Ces méconnaissances allaient souvent de pair avec des confusions désastreuses sur la nature des objets (ensembles, applications, etc …) ou sur le statut des symboles utilisés (indices, constantes ou variables). Ce dernier point était particulièrement sensible lorsqu'il s'agissait d'utiliser le concept mal compris de degré d'un polynôme : si P était écrit comme une somme de $p_k X^k$, beaucoup de candidats considéraient que le degré de P était l'indice k lui-même.
Toutes ces difficultés se sont révélées très pénalisantes dès les questions I 1° et I 2°, mais la situation s'est encore aggravé lorsqu'il fallut au I 3°, pour réduire le problème à du calcul matriciel, représenter par une matrice l'endomorphisme φ_n. Environ un tiers des candidats a ainsi échoué à construire cette matrice, même dans le cas n = 4, faute d'avoir bien compris la définition de cet endomorphisme ou la notion même de matrice d'un endomorphisme relativement à une base.
En revanche, ceux qui franchissaient cette question I 3° réussissaient en général les I 4°a et I 4°b sur l'inverse de cette matrice. Les questions I 4°c et I 5° étaient plus difficiles, mais un nombre appréciable de candidats a pu traiter le I 5°d, révélant une aptitude à interpréter un algorithme simple. Signalons cependant que sur toutes ces copies d'un niveau honorable, un peu plus de vigilance aurait permis d'éviter des erreurs trop courantes : oublier qu'un projecteur doit être linéaire, confondre l'ensemble-image d'une application avec son ensemble d'arrivée, affirmer que toute matrice triangulaire est inversible, considérer comme allant de soi que son inverse sera triangulaire, etc …

Le début de la partie II demandait une bonne compréhension des relations de comparaison. Rappelons qu'il suffit en général de savoir que $o(x^n)$ désigne une expression de la forme $x^n\omega(x)$, où $\omega(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, pour traiter toutes ces questions. On voit trop souvent l'expression $o((x+x^2)^n)$ devenir $o(x^n)$, quand ce n'est pas $o(x^{2n})$, sans aucune explication ; bien souvent la substitution de $x+x^2$ à x n'est pas posée clairement et le II 1°a est considéré comme allant de soi.
Les questions II 2°b et II 4°a auraient dû néanmoins permettre à ceux que l'algèbre linéaire rebutait de montrer leur savoir-faire sur quelques calculs d'analyse. Cette occasion fut souvent manquée faute de connaître le développement limité et/ou en série entière de $1/(1+x)$; encore faut-il noter que certaines réponses correctes étaient retrouvées laborieusement à partir de la formule de Taylor ou par application de la formule du développement de $(1+x)^m$ au cas $m=-1$.
La question II 3°, nettement plus difficile, n'a pas été abordée par un grand nombre de candidats ; quelques uns ont cependant su montrer un peu d'aisance dans le maniement des doubles sommes du II 3°b et du II3°c, sans pour autant tout élucider.

La partie III commençait par une question élémentaire sur une bijection entre deux intervalles. On y a retrouvé, comme au début du problème, les pires méprises sur la notion d'application bijective : ensemble image confondu avec l'ensemble d'arrivée, $a^{-1}(u)$ confondu avec $1/a(u)$, etc …
Une fois ces obstacles surmontés, des candidats en nombre significatif ont su développer $a^{-1}(u)$; il fallait toutefois connaître le développement en série entière de $(1+x)^m$ et l'écrire pour m = 1/2.
Les questions suivantes ne sont abordées de manière substantielle que par très peu de personnes, dont beaucoup utilisent imprudemment le symbole de racine carrée avec des nombres complexes.

Il s’avère donc que si un nombre trop limité de candidats a pu accéder à une compréhension globale de ce problème, une majorité a su néanmoins mettre en évidence ses connaissances, tant en algèbre linéaire qu’en analyse. Ces candidats sérieux ont ainsi traité la plupart des questions demandant un calcul, en délaissant souvent les questions plus abstraites. Certains autres, moins nombreux, maîtrisant par exemple l’articulation entre les endomorphismes et leur représentation matricielle ou encore la signification précise des développements limités, ont réussi à rédiger des devoirs tout à fait satisfaisants ; force est cependant de constater qu’il ne s’agit là que d’environ un quart des copies.

CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Les candidats doivent savoir que les mathématiques sont construites sur quelques notions-clés (ensemble, application) et leurs produits dérivés (ensemble-image, image-réciproque d’un ensemble, injection, surjection) et que toute méconnaissance ou incompréhension à leur sujet s’avère désastreuse. De même, un peu de réflexion s’impose quant à l’usage des symboles (constantes, variables, indices). Nul ne peut assimiler le programme de deuxième année sans une maîtrise minimale de ce langage des mathématiques. L’ignorer c’est limiter ses acquisitions à quelques savoir-faire dénués de signification.

Cette indispensable compréhension ne peut cependant s’exercer que si elle est nourrie par des connaissances. Comment fonder des raisonnements sur le degré des polynômes sans savoir définir précisément ce degré ? Peut-on espérer travailler sérieusement sur des séries (numériques, entières ou autres) sans connaître au moins la somme de la plus simple d’entre elles : la série géométrique ?

Le jury entend donc, dès les épreuves de la prochaine session, accentuer fortement cette exigence par des questions explicites relatives à des définitions, formules ou théorèmes du programme, avec la ferme intention de leur attribuer dans le barème des épreuves tout le poids qu’elles méritent.