MATHÉMATIQUES

Problème

Les trois parties du problème ne sont pas indépendantes.

***La fonction f étudiée tout au long du problème est introduite dans la partie* II.**

On rappelle que $\quad$ ***ch*** $t = \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$ $\quad$ ***et que*** $\quad$ ***sh*** $t = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$ $\quad$ ***pour tout réel*** t.

Partie I

1°. Soit k un entier $\geqslant 1$. Montrer que la fonction $\quad t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{t}}$ $\quad$ **est intégrable sur $]0, +\infty[$.**

On note $\quad J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

2°. Donner la valeur de J_k $\left(\text{on pourra utiliser l'égalité} \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\cdot$

3°. Montrer que la fonction $\quad t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\ t}$ $\quad$ **est intégrable sur $]0, +\infty[$.**

On note $K = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\; t}\cdot$

4°. (a) Montrer que $K = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}\,(1+\mathrm{e}^{-2t})}\,\mathrm{d}t.$

(b) En déduire que $K = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}\cdot$

5°. Montrer que $\dfrac{1}{2} < K < 1.$

Partie II

Soit n **un entier** $\geqslant 1$**. Pour tout réel** x **dans** $]0,\pi[$**, on pose :**

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \qquad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad \text{et} \qquad A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx).$$

6°. (a) Pour tout x **dans** $]0,\pi[$**, montrer que** $A_n(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{n\,x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\,x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot$

(b) Si $n \geqslant 2$**, montrer que** $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\Big(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) + \varepsilon_n(x)$**, où** $\big(\varepsilon_n(x)\big)_{n\geqslant 2}$ **est une suite tendant vers** 0**.**

7°. En déduire la convergence de la série de terme général $u_n(x)$**.**

On note $f\,(x)$ **la somme de la série de terme général** $u_n(x)$**.**

8°. (a) Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ **telle que** $f_{2n}\Big(\dfrac{\pi}{4n}\Big) - f_n\Big(\dfrac{\pi}{4n}\Big) \geqslant C\sqrt{n}.$
Expliciter une telle constante.

(b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ **converge-t-elle uniformément sur** $]0,\pi[$ **?**

On désigne par i **le nombre complexe de module** 1 **et d'argument** $\dfrac{\pi}{2}\cdot$ **Si** $z = a + \mathrm{i}\,b$ **est un nombre complexe avec** a **et** b **réels, on désigne par Im** (z) **sa partie imaginaire, c'est-à-dire** b**.**

9°. (a) Soit $x \in]0,\pi[$**. Déterminer le tableau de variations de la fonction** $t \mapsto |\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x-t} - 1|$ **définie pour** $t \in [0,+\infty[$**.**

(b) **Montrer que la fonction** $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}\,(1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x-t})}$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$.

(c) **Établir alors que** $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\ \mathbf{Im}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x-t} - \left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x-t}\right)^{n+1}}{\sqrt{t}\,(1-e^{\,\mathrm{i}x-t})}\,\mathrm{d}t.$

(d) **En déduire que** $f(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(\mathrm{ch}\,t-\cos x)}.$

(e) **Montrer que** $f(x) > 0$.

(f) **En comparant les valeurs de ch** t **et** e^t **sur** $]0,+\infty[$, **montrer que** $\dfrac{1}{2} < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 1.$

Partie III

Dans cette partie, $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[.$

10°. (a) Établir que la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}\,(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$.

(b) **Montrer que** $f(2x) = \dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\,(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}.$

11°. Montrer que f **est de classe** $\mathcal{C}^0$ **sur** $]0,\pi[$.

12°. Montrer que f **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]0,\pi[$.